



Temel Homotopi Teorisi

Editör:

Doç. Dr. Elis Soylu Yılmaz

Yazarlar:

Doç. Dr. Koray Yılmaz
Doç. Dr. Hatice Taşbozan

ISBN: 978-625-5753-35-9
ANKARA – 2025

TEMEL HOMOTOPİ TEORİSİ

EDİTÖR

Doç. Dr. Elis SOYLU YILMAZ
ORCID ID: 0000-0002-0869-310X

YAZARLAR

Doç. Dr. Koray YILMAZ
Kütahya Dumlupınar Üniversitesi, Matematik Bölümü,
koray.yilmaz@dpu.edu.tr
ORCID ID: 0000-0002-8641-0603

Doç. Dr. Hatice TAŞBOZAN
Hatay Mustafa Kemal Üniversitesi, Matematik Bölümü,
htasbozan@mku.edu.tr
ORCID ID: 0000-0002-6850-8658

DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.17895524>



Copyright © 2025 by UBAK publishing house.
All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, distributed
or transmitted in any form or by
any means, including photocopying, recording or other electronic or mechanical
methods, without the prior written permission of the publisher, except in the case of
brief quotations embodied in critical reviews and certain other noncommercial uses
permitted by copyright law. UBAK International Academy of Sciences Association
Publishing House ®
(The Licence Number of Publicator: 2018/42945).

E-mail: ubakyayinevi@gmail.com
www.ubakyayinevi.org

It is responsibility of the author to abide by the publishing ethics rules.
UBAK Publishing House 2025©

ISBN: 978-625-5753-35-9

December / 2025
Ankara / Turkey

ÖNSÖZ

Bu kitap, cebirsel topolojinin temel kavramlarını grafiksel ve erişilebilir bir biçimde sunmak amacıyla hazırlanmıştır. Özellikle homotopi teorisi, topolojik uzayların yapısal özelliklerini anlamada merkezi bir rol oynamakta olup, günümüz matematiğinin pek çok alanında giderek artan bir önem taşımaktadır. Bu bağlamda, kitapta yer alan bölümlerin her biri, konunun kavramsal temellerini ortaya koymayı ve ilgili kavramları somut örneklerle desteklemeyi hedeflemektedir.

Eserin hazırlanış sürecinde, hem lisansüstü düzeyde cebirsel topoloji çalışan araştırmacılar hem de konuya yeni başlayan öğrenciler için dengeli bir anlatım sunmaya özen gösterilmiştir. Okuyucunun teoriyi yalnızca tanımlar ve teoremler düzeyinde değil, aynı zamanda geometrik bir bakış açısıyla da kavrayabilmesi temel amaçlardan biridir. Bölümlerde yer alan ispatlar, mümkün olduğunca açık ve takip edilebilir biçimde verilmiş ; gerekli görülen yerlerde anlamayı kolaylaştıran açıklamalara ve notlara yer verilmiştir.

İçindekiler

1	Temel Topolojik Özellikler	7
1.1	Bağlantılılık	7
1.2	Kompaktlık	22
1.3	Hausdorff Özelliği	28
2	Çözümleyici Topoloji	33
2.1	Homeomorfizm	33
2.2	Ayrık Birleşim Uzayı	44
2.3	Çarpım Uzayları	48
2.4	Bölüm Uzayları	54
3	Homotopi	59
3.1	Homotopi	59
3.2	Homotopi Denklik	71
3.3	Çember	83
4	Homotopi Grupları	97
4.1	Homotopi Grupları	98
4.2	Açığa Çıkan Homomorfizmler	110
4.3	Temel Grup	113
4.4	Van Kampen Teoremi	116

Bölüm 1

Temel Topolojik Özellikler

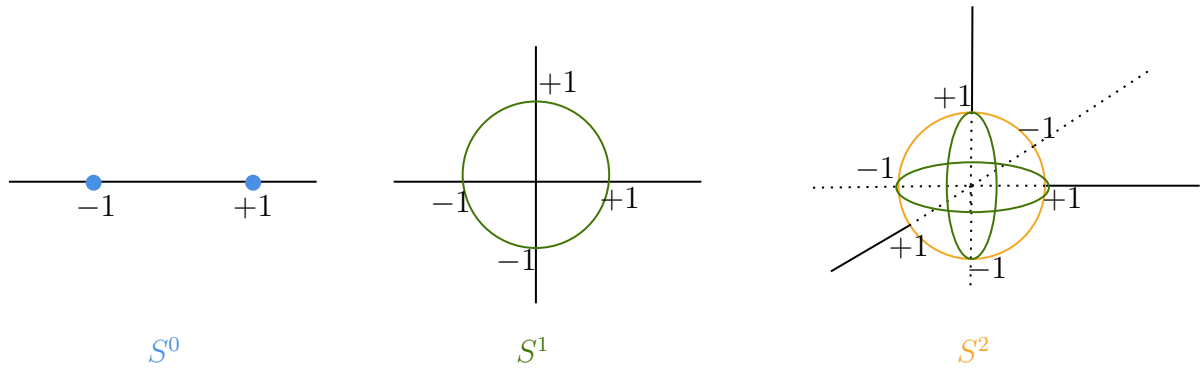
1.1 Bağlantılılık

Tanım 1.1.1 Her $n \in \mathbb{N}$ doğal sayısı için, r yarıçaplı bir n -**küre**, r noktasının $n+1$ boyutlu Öklidyen uzayda sabit bir c noktasına uzaklığı r olan noktalardan oluşan bir küme olarak tanımlanır. Burada r herhangi bir pozitif reel sayı ve c , $(n+1)$ boyutlu uzayın herhangi bir noktası olabilir.

Tanım 1.1.2 Verilen bir kartezyen koordinat sistemi için, yarıçapı 1 olan n -boyutlu bir birim küre orjine olan uzaklığı 1 olan noktaların kümesi

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}.$$

olarak tanımlanır.



Örnek 1.1.3 Reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ üzerinde standart(alışılmış) topoloji ile ele alınan

$$S^0 = \{-1, 1\}$$

kümesi üzerine indirgenen topoloji ile ayrık uzay olur.

Çözüm:

$\mathbb{R}$ üzerinde standart topoloji $\mathcal{U}$ ile gösterilmek üzere, herhangi bir $U \in \mathcal{U}$ açık kümesi için S^0 üzerinde indirgenen topoloji

$$\mathcal{U}_{S^0} = \{U \cap S^0 \mid U \in \tau\}$$

şeklinde tanımlanır. Özellikle, $\mathbb{R}$ 'nin standart topolojisinde açık olan bir U kümesi, her $x \in U$ için bir $0 < \epsilon < 1$ olmak üzere $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ açık aralığını içermektedir.

Buradan,

$$V = (-1 - \epsilon, -1 + \epsilon) \quad \text{ve} \quad T = (1 - \epsilon, 1 + \epsilon)$$

açık kümelerini seçersek, S^0 üzerindeki kesişimler

$$(-1 - \epsilon, -1 + \epsilon) \cap S^0 = \{-1\} \in \mathcal{U}_{S^0}, \quad (1 - \epsilon, 1 + \epsilon) \cap S^0 = \{1\} \in \mathcal{U}_{S^0}$$

olacaktır. Bu, her $x \in S^0$ noktası için $\{x\}$ tek nokta kümesinin açık bir küme olduğunu gösterir.

Sonuç olarak S^0 üzerine indirgenen alışılmış uzay ayırık uzay olur. $\square$

Teorem 1.1.4 $\mathbb{R} \rightarrow S^0$ olacak şekilde örten sürekli bir dönüşüm yoktur.

İspat. Kabul edelim ki $f : \mathbb{R} \rightarrow S^0$ sürekli ve örten bir fonksiyon olsun. S^0 ayırık topolojiye sahip olduğundan, $\{-1\}$ ve $\{1\}$ kümeleri S^0 uzayında açık kümelerdir. f sürekli olduğundan

$$U = f^{-1}(\{-1\}) \in \mathcal{U} \quad \text{ve} \quad V = f^{-1}(\{1\}) \in \mathcal{U}$$

olmalıdır. f örten olduğundan, U ve V boş olmayan ayırık kümelerdir. Ayrıca

$$f^{-1}(\underbrace{\{-1\} \cap \{+1\}}_{\emptyset}) = f^{-1}(\{-1\}) \cap f^{-1}(\{+1\}) = \emptyset$$

ve

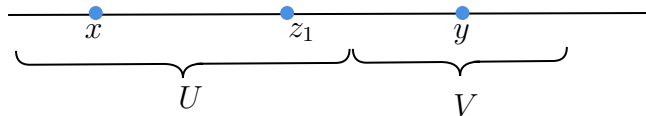
$$f^{-1}(\underbrace{\{-1\} \cup \{+1\}}_{S^0}) = f^{-1}(\{-1\}) \cup f^{-1}(\{+1\}) = \mathbb{R}$$

olduğundan

$$U \cup V = \mathbb{R}, \quad U \cap V = \emptyset$$

olur. Şimdi, $x \in U$ ve $y \in V$ olmak üzere $x < y$ olduğunu varsayalım. $[x, y]$ kapalı aralığını ele alalım. Bu aralığın orta noktası

$$z_1 = \frac{x + y}{2}$$



ya U kümesine ya da V kümesine ait olur. Eğer $z_1 \in V$ ise, $[x, z_1]$ aralığı bir ucu U kümesinde, bir ucu V kümesinde olur. $z_1 \in U$ olsun, $[z_1, y]$ aralığı ile işleme devam edelim.

Bu işlemi tekrarlayarak, uzunluğu giderek küçülen aralıklar elde edebiliriz.

$$z_2 = \frac{x + z_1}{2} \quad \text{veya} \quad z_2 = \frac{z_1 + y}{2}.$$

Bu şekilde elde edilen aralıkların sonsuz kesişimi tek bir z noktası olur. Bu nokta U kümesinde olursa, U açık küme olduğundan

$$(z - \delta, z + \delta) \subset U$$

olur. Ancak, yeterince küçük n için $[z_n, z_{n+1}]$ aralığının bir ucu U kümesinde, bir ucu V kümesinde olur. Bu,

$$U \cap V \neq \emptyset$$

çelişkisine yol açar. Aynı argüman $z \in V$ için de geçerlidir. Sonuç olarak, U ve V kümelelerinden biri boş küme olmalıdır. Dolayısıyla, f örten ve süreklili olamaz. $\square$

Tanım 1.1.5 (X, τ) topolojik uzayında $U \cup V = X$ olacak şekilde boş kümeden farklı olan ayrık ve açık kümeler varsa (X, τ) topolojik uzayında bağlantısız uzay denir. Eğer bu tür U ve V kümeleri mevcut değilse, (X, τ) topolojik uzayına bağlantılı uzay denir.

Örnek 1.1.6 $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ ayrık uzayı için $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$U = \{x\} \quad \wedge \quad V = \mathbb{R} \setminus \{x\}$$

alınırsa

$$U, V \neq \emptyset, \quad U \cap V = \emptyset, \quad U \cup V = \mathbb{R}$$

olacağından $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ uzayı bağlantısız uzay olur. 1.1.4 teoreminin ispatının ikinci kısmından $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ alışılmış uzayının bağlantılı uzay olduğu görülür.

Sonuç 1.1.7 Bir uzayın bağlantılı uzay olması özelliği üzerinde tanımlı olan topolojiye bağlıdır.

Sonuç 1.1.8 Birden fazla nokta içeren ayrık uzay bağlantısız uzay olur.

İspat. (X, τ) bir ayrık uzay olsun ve X kümesi birden fazla nokta içersin. Ayrık bir uzayda her alt küme açıktır. Bu nedenle, X uzayının herhangi iki $A, B \subset X$ alt kümesi için

$$A \cup B = X \quad \text{ve} \quad A \cap B = \emptyset$$

olacak şekilde A ve B kümeleri seçilebilir. (Örneğin $A = \{a\}$ ve $B = X - \{a\}$.)

A ve B kümeleri ayrık ve açık olduğundan, X kümesi $A \cup B$ şeklinde iki ayrık açık kümenin birleşimi olarak ifade edilebilir. Dolayısıyla, X bağlantısız uzay olur. $\square$

Lemma 1.1.9 Bağlantılı bir uzaydan bağlantısız bir uzaya sürekli örten dönüşüm yoktur.

İspat. X bağlantılı bir topolojik uzay ve Y bağlantısız bir topolojik uzay olsun.

$$f : X \rightarrow Y$$

sürekli ve örten bir fonksiyon olduğunu varsayalım. Y bağlantısız uzay olduğundan $U, V \neq \emptyset$ olmak üzere

$$Y = U \cup V, \quad U, V \text{ açık ve } U \cap V = \emptyset$$

yazılabilir. f sürekli olduğundan, $f^{-1}(U)$ ve $f^{-1}(V)$ kümeleri X içinde açık kümelerdir ve

$$X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V).$$

olur. Ayrıca $U \cap V = \emptyset$ olduğundan,

$$f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset.$$

olur. Bu, X uzayının boş kümeden farklı olan ayrık iki açık kümenin birleşimi olduğunu gösterir. Ancak X bağlantılı uzay olduğu için çelişki elde edilir. Dolayısıyla f sürekli ve örten olamaz. $\square$

Örnek 1.1.10 $(0, 1)$ açık aralığı bağlantılıdır. $\mathbb{R}$ için yapılan ispatla aynı şekilde gösterilebilir. Dolayısıyla,

$$(0, 1) \rightarrow S^0$$

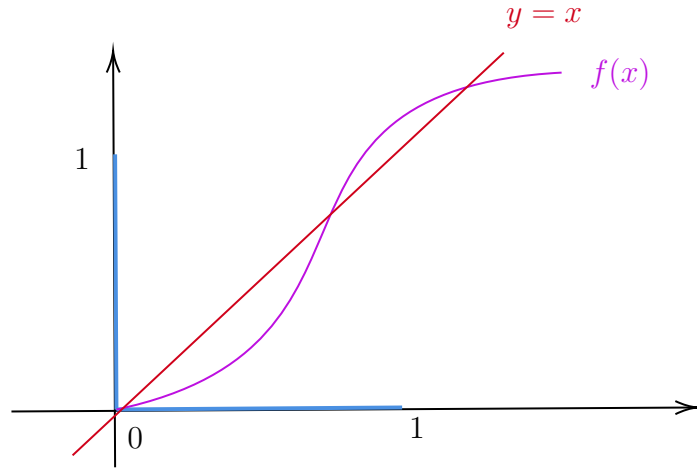
şeklinde sürekli ve örten bir dönüşüm yoktur. Benzer şekilde $[0, 1]$ kapalı aralıkta bağlantılıdır.

Sonuç 1.1.11 $a, b \in \mathbb{R}$ için $a < b$ olmak üzere (a, b) ve $[a, b]$ aralıkları üzerlerine indirgenen alışılmış topoloji ile bağlantılı uzay olurlar.

Teorem 1.1.12 $(0, 1)$ aralığı için **Sabit Nokta Teoremi:**)

$$f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

sürekli fonksiyonunun sabit bir noktası vardır, yani $[0, 1]$ aralığında $f(x) = x$ olacak şekilde en az bir x noktası bulunur.



İspat. $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ sürekli ancak sabit noktası olmadığını varsayalım. Bu durumda, her $x \in [0, 1]$ için $f(x) \neq x$ olur.

$$g(x) = \frac{x - f(x)}{|x - f(x)|}$$

şeklinde bir fonksiyon tanımlayalım. Burada $x \neq f(x)$ olduğu için, g toplama ve sıfırdan farklı sayılarla bölme işlemlerinin bileşimi olduğundan sürekli olur. $x \neq f(x)$ için

$$\begin{aligned} x \neq f(x) &\Rightarrow f(x) > x \vee f(x) < x \\ &\Rightarrow g(x) = 1 \vee g(x) = -1 \end{aligned}$$

olduğundan $g(x)$ yalnızca $+1$ veya -1 değerlerini alır, bu nedenle g fonksiyonun

$$g : [0, 1] \rightarrow S^0$$

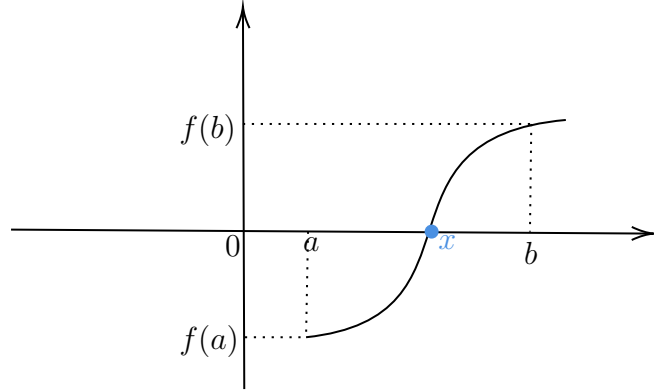
sürekli ve örten bir fonksiyon olarak düşünebiliriz. $[0, 1]$ bağlantılı S^0 bağlantısız olduğundan çelişki elde ederiz. O halde f fonksiyonunun sabit bir noktası olmalıdır. $\square$

Teorem 1.1.13 (Ortalama Değer Teoremi)

Eğer

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

sürekli bir fonksiyon ve $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ ise, o zaman $f(x) = 0$ olacak en az bir $x \in [a, b]$ vardır.



İspat. Kabul edelim ki her $x \in [a, b]$ için $f(x) \neq 0$ olsun. Buradan

$$\bar{f}(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $f(x)$ sürekli olduğu için $\bar{f}$ fonksiyonu da sürekli olur. Ayrıca, $f(a) < 0$ olduğundan $\bar{f}(a) = -1$ ve $f(b) > 0$ olduğundan $\bar{f}(b) = +1$ olur. Dolayısıyla

$$\bar{f} : [a, b] \rightarrow S^0$$

fonksiyonu örten olur. $[a, b]$ aralığı bağlantılı olduğundan $\bar{f}$ sürekli bir fonksiyon olamaz.

Bu bir çelişkidir. O halde varsayımımız yanlış olmalıdır, yani $f(x) = 0$ sağlayan en az bir x bulunmalıdır. $\square$

Teorem 1.1.14 *Bağlantılılık süreklilik altında korunur. Yani, eğer X bağlantılı bir uzay ve $f : X \rightarrow Y$ sürekli bir fonksiyon ise $f(X)$ uzayında bağlantılı bağlantılı uzay olur.*

İspat. Kabul edelim ki $f(X)$ bağlantısız uzay olsun. Yani $f(X)$ boş kümeden farklı iki ayrık açık kümenin birleşimi olarak yazılabilir.

$$f(X) = A \cup B, \quad A \cap B = \emptyset \text{ ve } A, B \text{ açık}$$

f sürekli olduğundan, $f^{-1}(A)$ ve $f^{-1}(B)$, X içinde açık kümeler olurlar. Ayrıca,

$$X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

ve

$$f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

eşitlikleri sağlanır.

Bu, X kümesinin boş kümeden farklı $f^{-1}(A)$ ve $f^{-1}(B)$ ayrık açık kümelerinin birleşimi olarak ifade edilebileceğini gösterir. Bu ise X uzayının bağlantılı olması ile çelişir. Bu çelişkidenden dolayı, $f(X)$ bağlantılı olmalıdır. $\square$

Teorem 1.1.15 $\mathbb{R}^n$ bağlantılıdır.

İspat. $\mathbb{R}^n$ uzayının bağlantılı olmadığını varsayalım. Yani, $\mathbb{R}^n$ boş kümeden farklı ayrık olmayan iki açık kümenin birleşimi olarak yazılabiliyor olsun.

$$\mathbb{R}^n = U \cup V, \quad U \cap V = \emptyset \text{ ve } U, V \text{ açık}$$

Şimdi, bir noktayı sabitleyerek bir yol oluşturacağız. Bir $x_0 \in U$ noktası ve bir $x_1 \in V$ noktası seçelim. Birim aralık üzerinde sürekli bir fonksiyon tanımlayalım:

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto \gamma(t) = (1-t)x_0 + tx_1 \end{aligned}$$

Bu fonksiyon, x_0 noktasından x_1 noktasına doğru uzanan bir doğru parçasıdır ve sürekli. Birim aralık bağlantılıdır, bu yüzden $\gamma([0, 1])$ kümesi de bağlantılıdır. Ancak, bu küme hem U hem de V içinde olmalıdır çünkü U ve V ayrık kabul edilmişti. Bu, $\gamma([0, 1])$ kümesinin boş kümeden farklı ayrık olmayan iki küme şeklinde ifade edilebileceği anlamına gelir ki bu $\gamma([0, 1])$ kümesinin bağlantılı olması ile çelişir.

Dolayısıyla, $\mathbb{R}^n$ ayrık iki açık küme şeklinde ifade edilemez, yani bağlantılıdır. $\square$

Örnek 1.1.16 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ kümesi $n > 1$ için bağlantılıdır.

Çözüm: $n > 1$ için $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ kümesinin bağlantılı olmadığını varsayalım. Yani, bu küme boş kümeden farklı ayrık olmayan iki açık kümenin birleşimi olarak yazılabiliyor olsun.

$$\mathbb{R}^n \setminus \{0\} = U \cup V, \quad U \cap V = \emptyset \text{ ve } U, V \text{ açık}$$

Bir $x \in U$ ve bir $y \in V$ noktası seçelim. Eğer x ve y arasındaki doğru parçası 0 noktasını içermiyorsa, önceki ispatı olduğu gibi uygulayabiliriz.

Ancak, x ile y arasındaki doğru 0 noktasından geçiyorsa, yeni bir nokta seçmemiz gerekir. Bunun için, x ile y doğrusunun üzerinde olmayan herhangi bir $z \in \mathbb{R}^n$ noktası seçelim. Bu nokta ya U kümesinde ya da V kümesinde bulunur. Eğer $z \in U$ ise, x noktasını z noktası ile değiştiririz; eğer $z \in V$ ise, y noktasını z noktası ile değiştiririz.

Bu değişiklik sonucunda, U kümesinde bir nokta ve V kümesinde bir nokta seçmiş oluruz ve bunları birleştiren doğru parçası artık 0 noktasından geçmeyecektir. Önceki ispat bu durumda geçerli olduğu için $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ bağlantılıdır.

Öte yandan, $n = 1$ için $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ bağlantılı değildir. Gerçekten de,

$$U = (0, \infty), \quad V = (-\infty, 0)$$

seçimleriyle U ve V açık, boş kümeden farklı, ayrık ve birleşimleri $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ olur. Bu nedenle $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ bağlantısızdır. $\square$

Lemma 1.1.17 Eğer X bağlantısız ise,

$$X \rightarrow S^0$$

şeklinde sürekli bir örten dönüşüm vardır.

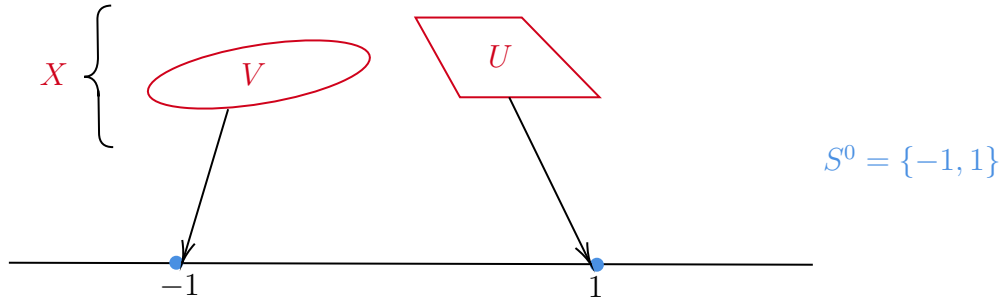
İspat. Eğer X bağlantısız ise, X kümesi boş kümeden farklı ayrık olmayan U ve V gibi iki açık alt kümesi için

$$U, V \subset X, \quad U \cap V = \emptyset, \quad U \cup V = X$$

olarak yazılabilir. Şimdi, $f : X \rightarrow S^0$ fonksiyonunu

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in U \\ -1, & x \in V \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım.



Bu tanım U ve V kümeleri ayrık olmasından dolayı iyi tanımlıdır ve f tüm S^0 kümesini kapsadığı için **örten** bir fonksiyondur. Ayrıca, $f^{-1}(\{1\}) = U$ ve $f^{-1}(\{-1\}) = V$ açık kümeler olduğundan, f **sürekli** olur. $\square$

Önerme 1.1.18 Eğer X bağlantılı bir uzay ve Y bağlantısız bir uzay ise

$$X \rightarrow Y$$

şeklinde sürekli bir örten dönüşüm yoktur.

İspat. Eğer Y bağlantısız ise

$$Y \rightarrow S^0$$

şeklinde sürekli bir örten dönüşüm vardır. Kabul edelim ki

$$X \rightarrow Y$$

sürekli ve örten bir dönüşüm mevcut olsun. Buradan iki dönüşümü birleştirerek

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow[\text{örten}]{\text{sürekli}} & Y & \xrightarrow[\text{örten}]{\text{sürekli}} & S^0 \\ & \searrow \text{sürekli örten} & & \nearrow & \end{array}$$

şeklinde sürekli ve örten bir dönüşüm elde ederiz. Ancak X bağlantılı olduğu için $X \rightarrow S^0$ dönüşümü sürekli ve örten olamaz. Bu çelişki varsayımımızın yanlış olduğunu gösterir. Sonuç olarak X bağlantılı bir uzay ve Y bağlantısız bir uzay olmak üzere

$$X \rightarrow Y$$

şeklinde sürekli ve örten bir dönüşüm yoktur. $\square$

Örnek 1.1.19 $\mathbb{R}$ bağlantılı ve $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ bağlantısız olduğundan

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

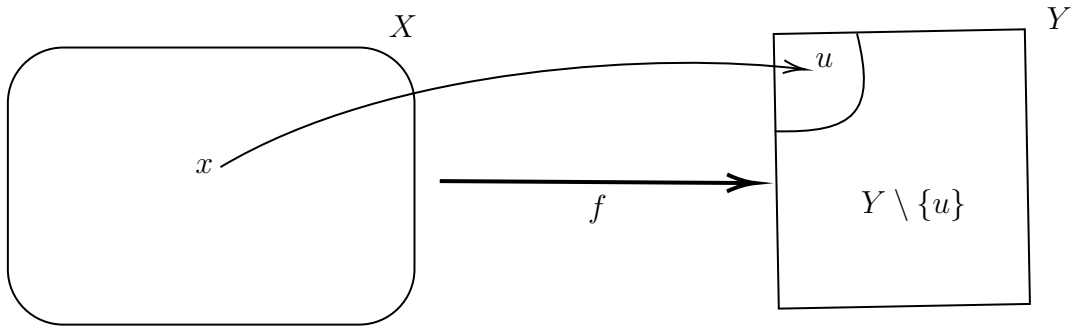
şeklinde sürekli bir örten dönüşüm yoktur.

Teorem 1.1.20 Eğer X bağlantılı bir uzay ve Y ayrık bir uzay ise

$$f : X \rightarrow Y$$

fonksiyonu sürekli ise sabit fonksiyondur.

İspat. f fonksiyonunun görüntüsünde bir u noktası seçelim, yani $u = f(x)$ olacak şekilde bir $x \in X$ olsun.



Y üzerinde ayrık uzay olduğundan $\{u\}$ ve $Y - \{u\}$ kümeleri bu uzayda açık küme olurlar. f fonksiyonu sürekli olduğundan $f^{-1}(\{u\})$ ve $f^{-1}(Y - \{u\})$ kümeleri de X uzayında açık küme olurlar. Ayrıca, bu iki küme **ayrık** olup birleşimleri Y kümesini kapsar:

$$\{u\} \cup (Y - \{u\}) = Y$$

Buradan

$$f^{-1}(\underbrace{\{u\} \cap \{Y - \{u\}\}}_{\emptyset}) = f^{-1}(\{u\}) \cap f^{-1}(Y - \{u\}) = \emptyset$$

ve

$$f^{-1}(\underbrace{\{u\} \cup \{Y - \{u\}\}}_Y) = f^{-1}(\{u\}) \cup f^{-1}(Y - \{u\}) = X$$

olduğundan ¹

$$f^{-1}(\{u\}) \cup f^{-1}(Y - \{u\}) = X, \quad f^{-1}(\{u\}) \cap f^{-1}(Y - \{u\}) = \emptyset$$

olur. X bağlantılı uzay olduğundan, $f^{-1}(\{u\})$ veya $f^{-1}(Y - \{u\})$ kümelerinden biri boş küme olmalıdır. $x \in f^{-1}(\{u\})$ olduğu için $f^{-1}(\{u\})$ küme boş olamaz. O halde, $f^{-1}(Y - \{u\})$

¹Burada f öngörüntü fonksiyonu olduğundan $f^{-1}(Y) = X$ her zaman sağlanır.

$\{u\}$) boş küme olmalıdır. Bu ise $f(X) = \{u\}$ olduğu, yani f fonksiyonunun sabit olduğu anlamına gelir.

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{u\}) \cup \underbrace{f^{-1}(Y - \{u\})}_{\emptyset} &= X \Rightarrow f^{-1}(\{u\}) = X \\ &\Rightarrow f(X) = u \end{aligned}$$

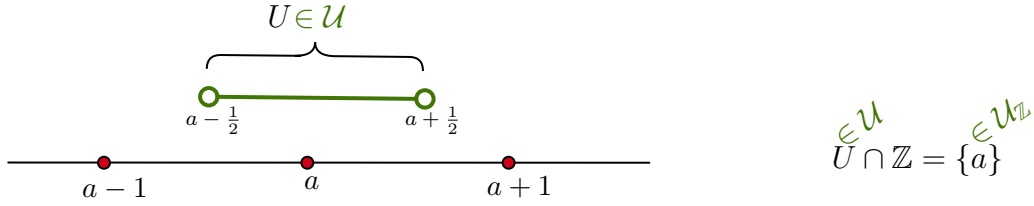
□

Örnek 1.1.21 $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ uzayından $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi üzerine indirgenen alt uzay ayrık uzay olur.

Çözüm: $a \in \mathbb{Z}$ noktasını alalım. $U =]a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}[\in \mathcal{U}$ kümesi $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ uzayında açık küme ve

$$U =]a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}[\cap \mathbb{Z} = \{a\}$$

olduğundan $\{a\} \in \mathcal{U}_{\mathbb{Z}}$ elde ederiz.



Her $a \in \mathbb{Z}$ noktası için $\{a\} \in \mathcal{U}_{\mathbb{Z}}$ olduğundan $(\mathbb{Z}, \mathcal{U}_{\mathbb{Z}})$ uzayında her küme açık küme olur. Sonuç olarak $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ alışılmış uzayından $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi üzerine indirgenen alt uzay $(\mathbb{Z}, \mathcal{U}_{\mathbb{Z}})$ ayrık uzay olur. □

Sonuç 1.1.22 $\mathbb{R}$ uzayı bağlantılı ve $\mathbb{Z}$ uzayı ayrık uzay olduğundan

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$$

olacak şekilde sadece sabit fonksiyon süreklidir.

Örnek 1.1.23 Eğer S bağlantısız bir uzay ise $f(0) = x \in U$ ve $f(1) = y \in V$ olacak şekilde

$$f : [0, 1] \rightarrow S$$

süreklili bir fonksiyon tanımlanamaz.

Çözüm: Kabul edelim ki, $f : [0, 1] \rightarrow S$ sürekli bir fonksiyon $f(0) = x \in U$ ve $f(1) = y \in V$ olsun.

$[0, 1]$ aralığı bağlantılı bir uzaydır. f sürekli olduğu için, $f([0, 1])$ kümesi de bağlantılıdır. $f([0, 1])$ kümesi U ve V ayrık açık kümelerinin birleşiminde yer almak zorundadır. Bu, $f([0, 1])$ kümesinin ya tamamen U ya da tamamen V içinde olması gerektiğini ifade eder.

Fakat $f(0) \in U$ ve $f(1) \in V$ olduğu için, $f([0, 1])$ hem U hem de V içinde noktalar içermek zorundadır. Bu bir çelişkidir. Sonuç olarak S bağlantısız bir uzay olmak üzere

$$f(0) = x \in U, f(1) = y \in V$$

eşitliklerini sağlayan sürekli bir $f : [0, 1] \rightarrow S$ fonksiyonu var olamaz. $\square$

Örnek 1.1.24 X kümesini $X = \{a, b, c\}$ olarak tanımlayalım. Aşağıdaki topolojiler altında X kümesininin bağlantılı olup olmadığını inceleyelim.

- $\tau_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$
- $\tau_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$
- $\tau_3 = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{c\}, \{a, b, c\}\}$

Çözüm:

Bir topolojik uzayın bağlantısız olması için, uzayın boş kümeden farklı iki ayrık açık kümenin birleşimi olarak yazılabilmesi gerekir.

- τ_1 ailesinde X kümesini boş kümeden farklı iki ayrık açık kümenin birleşimi olarak yazmak mümkün değildir. Bu nedenle X uzayı τ_1 topolojisi ile bağlantılı uzay olur.
- τ_2 ailesinde X , $\{a\}$ ve $\{b, c\}$ şeklinde boş kümeden farklı iki ayrık açık kümenin birleşimi olarak yazılabilir. Bu nedenle X uzayı τ_2 topolojisi ile bağlantısız uzay olur.
- τ_3 ailesinde X , $\{a, b\}$ ve $\{c\}$ şeklinde boş kümeden farklı iki ayrık açık kümenin birleşimi olarak yazılabilir. Bu nedenle X uzayı τ_3 topolojisi ile bağlantısız uzay olur.

$\square$

Lemma 1.1.25 X uzayında boş kümeden ve X kümesinden farklı bir küme hem açık hem kapalı ise, X bağlantısız uzay olur.

İspat.

$A \subset X$ hem **açık** hem kapalı bir küme ve $\emptyset \neq A \neq X$ olsun. Bu durumda X kümesi, A ve $X \setminus A$ kümelerinin ayrık birleşimi olarak yazılabilir.

$$X = A \cup (X \setminus A)$$

Burada A aynı zamanda kapalı küme olduğundan $X \setminus A$ **açık** küme olur. Ayrıca

$$A \cap (X \setminus A) = \emptyset$$

olduğu açıktır. $A \neq \emptyset$ ve $A \neq X$ olduğundan $X \setminus A \neq \emptyset$ olduğundan A ve $X \setminus A$ kümeleri **boş kümeden farklıdır**. Bu nedenle X , boş kümeden farklı iki ayrık açık kümenin birleşimi olarak yazılabildiği için **bağlantısız** uzay olur.

$\square$

Örnek 1.1.26 $\mathbb{Q}$ üzerinde alışılmış uzaydan indirgenen topoloji olsun. $a, b \notin \mathbb{Q}$ için $A = [a, b] \cap \mathbb{Q}$ kümesi

$$A = \underbrace{[a, b] \cap \mathbb{Q}}_{\in \mathcal{U}_{\mathbb{Q}}^t} = \underbrace{[a, b] \cap \mathbb{Q}}_{\in \mathcal{U}_{\mathbb{Q}}}$$

$\mathbb{Q}$ alt uzayında hem açık hem kapalı küme olduğundan $\mathbb{Q}$ bağlantısız uzay olur.

Örnek 1.1.27 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$ fonksiyonu sürekli ise sabittir.²

Çözüm:

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$ sürekli bir fonksiyon olsun. $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için $f(x_1) = q_1$ ve $f(x_2) = q_2$ olduğunu varsayalım.

f sürekli olduğu için, ortalama değer teoremine göre f , q_1 ile q_2 arasındaki tüm değerleri almalıdır. Eğer $q_1 \neq q_2$ ise, o zaman q_1 ile q_2 arasında bir değer r vardır ki bu değer irrasyonel olmalıdır; bu, f değerinin tamamen $\mathbb{Q}$ içinde olduğu gerçeğiyle çelişir.

Bu nedenle, $q_1 = q_2$ olmalıdır. Herhangi bir $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için $f(x_1) = f(x_2)$ olduğundan f fonksiyonu sabittir. $\square$

Örnek 1.1.28 Tam sayılar kümesi üzerinde ayrık olmayan (kaba) topoloji olsun. $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesinin bağlantılı olma durumunu inceleyelim.

Çözüm:

Tam sayılar kümesi $\mathbb{Z}$ üzerinde kaba topoloji $\tau = \{\emptyset, \mathbb{Z}\}$ olduğundan, açık kümeler yalnızca boş küme ve $\mathbb{Z}$ kümesidir.

Bir uzay bağlantılı ise boş kümeden farklı ayrık iki açık kümenin birleşimi olarak yazamayız. Burada $\mathbb{Z}$ yalnızca boş küme ve kendisi olan açık kümelere sahiptir. Bu nedenle, boş kümeden farklı ayrık iki açık küme bulmak mümkün değildir.

Sonuç olarak, kaba topoloji ile $\mathbb{Z}$ kümesi bağlantılı uzay olur. $\square$

Sonuç 1.1.29 X kümesi üzerinde kaba topoloji varsa X bağlantılı uzay olur.

Sonuç 1.1.30 X kümesi üzerinde topoloji kabalaştıkça (inceldikçe) bağlantılılık özelliği artar (azalır).

Tanım 1.1.31 Bir X uzayında her $x, y \in X$ için, x ile y arasında bir yol varsa bu uzaya yol bağlantılı uzay denir.

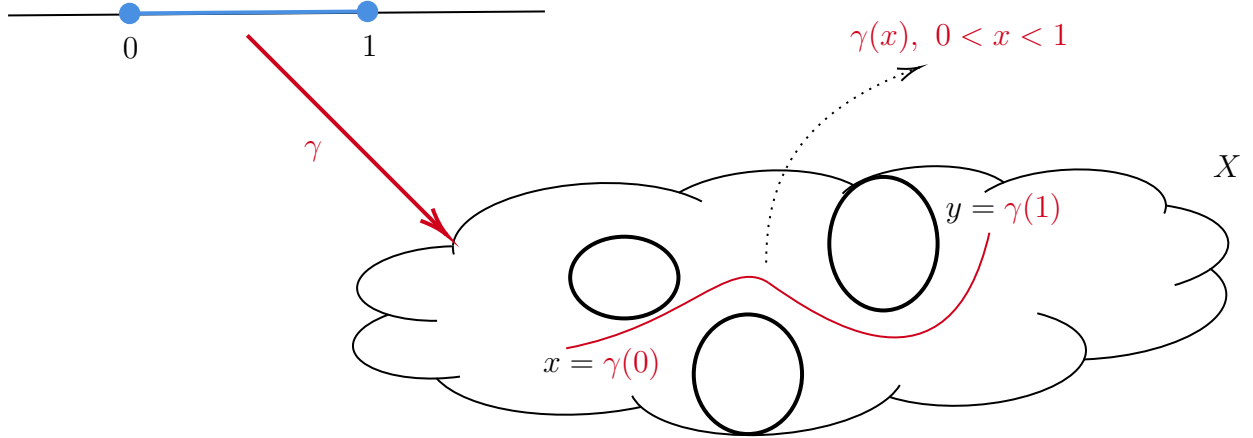
$$\gamma : [0, 1] \rightarrow X$$

²Burada $\mathbb{R}$ uzayı bağlantılı uzaydır ancak $\mathbb{Q}$ üzerine indirgenen alışılmış uzay ayrık uzay olmadığından Teorem 1.1.20 kullanılamaz.

sürekli bir fonksiyon olmak üzere

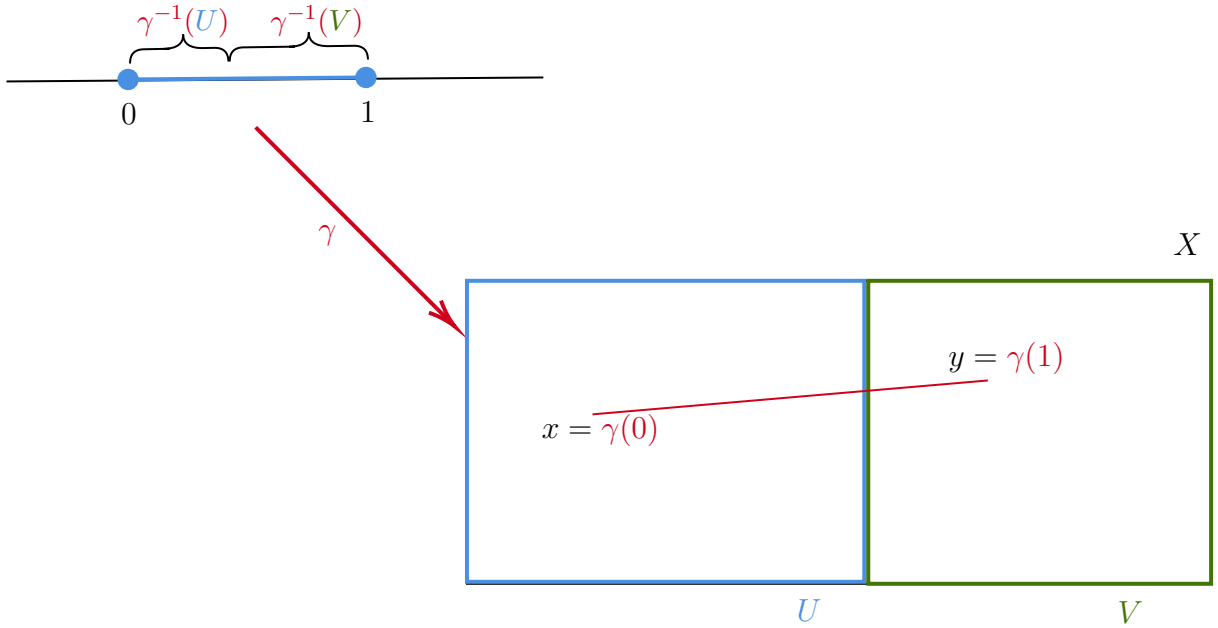
$$\gamma(0) = x \quad \text{ve} \quad \gamma(1) = y$$

eşitlikleri sağlanıyorsa X uzayı yol bağlantılı uzay olur.



Lemma 1.1.32 Bir yol bağlantılı uzay bağlantılı uzay olur.

İspat. X yol bağlantılı bir uzay ve $U, V \subset X$ kümeleri $U \cup V = X$ olacak şekilde ayrık ve açık kümeler olsun. Eğer U ve V her ikisi de boş kümeden farklı ise bir $x \in U$ ve bir $y \in V$ seçebiliriz. Yol bağlantılı uzay tanımından, x noktasından y noktasına uzanan sürekli bir γ yolu vardır.



$\gamma^{-1}(U)$ ve $\gamma^{-1}(V)$ kümeleri $[0, 1]$ aralığında birbirinden ayrık açık kümelerdir ve birleşimleri $[0, 1]$ kümesini verir. Ayrıca, $0 \in \gamma^{-1}(U)$ ve $1 \in \gamma^{-1}(V)$ olduğundan her ikisi de boş kümeden farklıdır. Bu durum $[0, 1]$ aralığının bağlantılı olması ile çelişir. O halde ya $U = \emptyset$ ya da $V = \emptyset$ olmalıdır. Bu ise X uzayının bağlantılı uzay olduğunu gösterir. $\square$

Not. Bağlantılı uzay olma özelliği ve yol ile bağlantılı uzay olma özelliği arasındaki ilişkiyi aşağıdaki gibi özetleyebiliriz.

Yol ile bağlantılı $\Rightarrow$ Bağlantılı

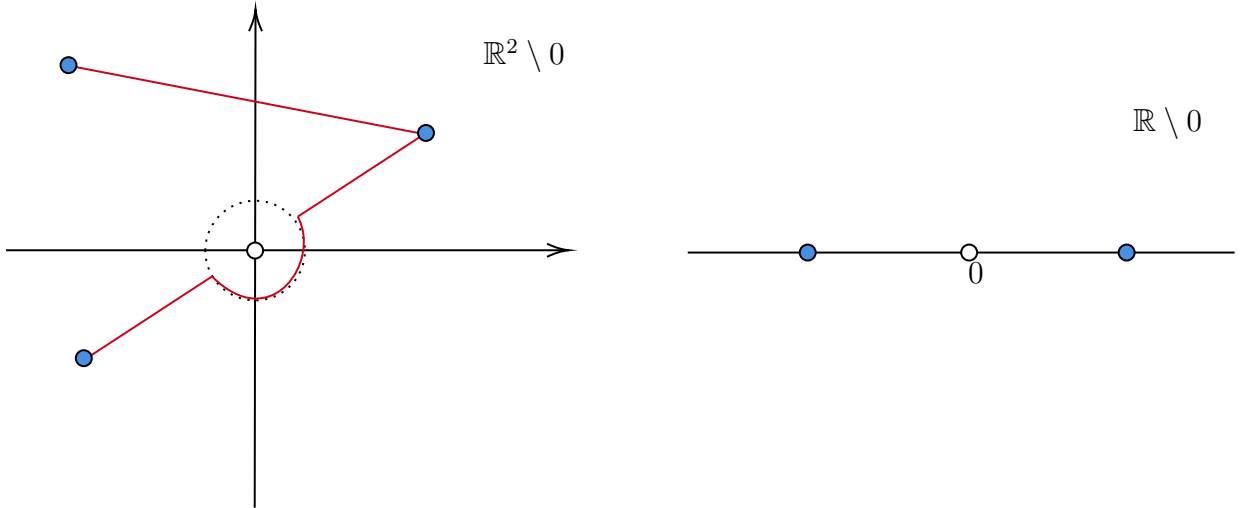
$\nLeftarrow$ (Tersi olmayabilir)

Bağlantılı değil $\Rightarrow$ Yol ile bağlantılı değil

$\square$

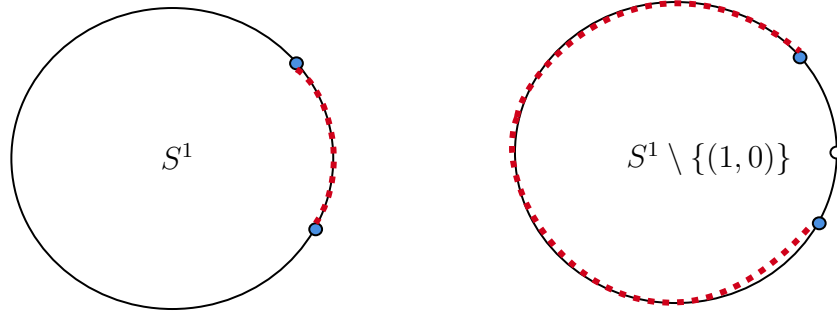
Örnek 1.1.33 $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ uzayı yol bağlantılıdır. $x, y \in X$ için, eğer x ve y arasındaki doğru parçası $(0, 0)$ noktasını içermiyorsa, bu doğru parçası X içinde bir yol oluşturur. Eğer doğru parçası $(0, 0)$ noktasından geçiyorsa, önce $(0, 0)$ merkezli ve x noktasından geçen bir yarım çember boyunca ilerleyerek $(0, 0)$ noktasından kaçınabiliriz. Daha sonra düz bir yol ile y noktasına ulaşabiliriz.

Dolayısıyla, X içinde her iki nokta bir yol ile bağlanabilir ve X yol bağlantılı uzay olur.



Buna karşılık, $\mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ uzayı, boş kümeden farklı ayrık ve boş olmayan iki açık kümenin birleşimi olduğundan bağlantılı uzay değildir. Dolayısıyla yol ile bağlantılı uzay değildir.

Örnek 1.1.34 S^1 uzayı yol bağlantılı uzaydır. $x, y \in S^1$ için, bu noktalar arasındaki büyük çember boyunca bir yol belirleyebiliriz. Dolayısıyla S^1 yol bağlantılıdır.



Benzer şekilde, $S^1 \setminus \{(1,0)\}$ uzayı da yol bağlantılı uzay olur. $x, y \in S^1 \setminus \{(1,0)\}$ için, yine büyük çember boyunca bir yol bulabiliriz. Dolayısıyla, $S^1 \setminus \{(1,0)\}$ uzayı da yol bağlantılı uzay olur.

Not. $\mathbb{R}$ bağlantılı uzay olmasına rağmen bir $a \in \mathbb{R}$ noktası için $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ bağlantısız uzay olur. Ancak S^1 bağlantılı uzaydır ve bir $b \in S^1$ için $S^1 \setminus \{b\}$ bağlantılı uzay olur. $\mathbb{R}$ ve S^1 arasındaki bu ilişkiyi ilerleyen bölümlerde bu iki uzayın homeomorf olmadığını örneklemek için kullanacağız. $\square$

Örnek 1.1.35 Birden fazla nokta içeren kaba uzay yol bağlantılıdır.

Çözüm:

X uzayı birden fazla noktayı içersin ve üzerinde kaba topoloji tanımlı olsun. Bu durumda, X uzayında herhangi iki nokta x, y için, $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ fonksiyonunu

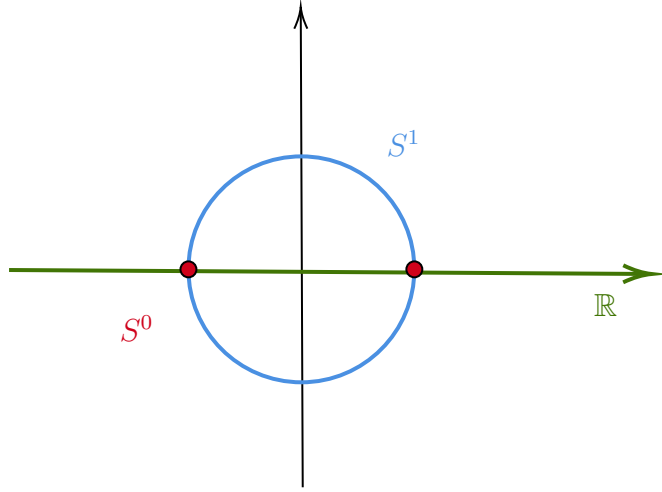
$$\gamma(t) = \begin{cases} x & \text{eğer } t = 0 \\ y & \text{eğer } t = 1 \\ x & \text{diğer durumlar için} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Görüntü kümesi üzerinde kaba topoloji olduğundan uzaydaki açık kümeler boş küme ve X için öngörüntüleri boş küme ve $[0, 1]$ açık küme olacağından γ fonksiyonu $[0, 1]$ aralığı üzerinde sürekli bir yol oluşturur. Dolayısıyla, x ve y noktaları arasında sürekli bir yol olduğu için, X kümesi kaba uzay ile yol bağlantılı uzay olur. $\square$

Örnek 1.1.36 $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ ve $[2, 3] \subset \mathbb{R}$ bağlantılı olmasına rağmen $[0, 1] \cup [2, 3] \subset \mathbb{R}$ bağlantılı değildir.

Sonuç 1.1.37 Bağlantılı iki uzayın birleşimi bağlantılı uzay olmayabilir.

Örnek 1.1.38 S^1 ve $\mathbb{R}$ bağlantılı olmasına rağmen $S^1 \cap \mathbb{R} = S^0$ bağlantılı değildir.



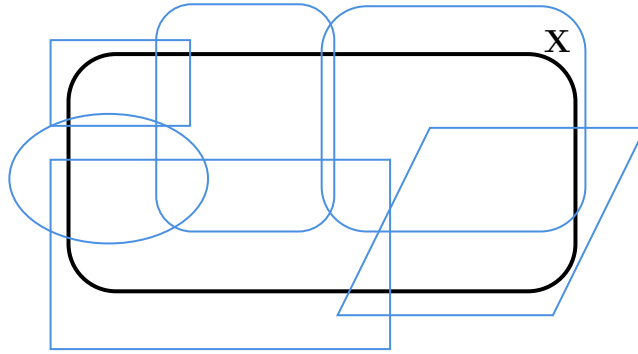
Sonuç 1.1.39 Bağlantılı iki uzayın arakesiti bağlantılı uzay olmayabilir.

1.2 Kompaktlık

Tanım 1.2.1 Bir X kümesi için $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ herhangi bir küme ailesi olmak üzere

$$X \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$$

oluyorsa $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ailesine X uzayının bir **örtüsü** denir.



Tanım 1.2.2 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ailesi bir X kümesi için örtü olsun.

- Eğer örtü sonlu sayıda kümeden oluşuyorsa, yani

$$X \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i$$

şeklinde yazılabiliyorsa, bu örtüye **sonlu örtü** denir.

- Eğer X bir topolojik uzay ise ve $\{U_\alpha\}$ ailesindeki her küme X uzayındaki topolojide açık bir küme ise, bu örtüye **açık örtü** denir.
- Eğer X bir topolojik uzay ise ve $\{U_\alpha\}$ ailesindeki her küme X uzayındaki topolojide kapalı bir küme ise, bu örtüye **kapalı örtü** denir.

Örnek 1.2.3

- **Örtü:** $X = (0, 1)$ ve $U_n = (0, 1 + \frac{1}{n})$ olmak üzere $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ küme ailesi, X kümesinin bir örtüsüdür çünkü

$$X \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$$

olur.

- **Sonlu Örtü:** $X = \{a, b, c\}$ kümesi için $U_1 = \{a, b\}$ ve $U_2 = \{b, c\}$ kümeleri verildiğinde, $\{U_1, U_2\}$ bir sonlu örtüdür çünkü sonlu sayıda küme ile

$$X \subseteq U_1 \cup U_2$$

olur.

- **Açık Örtü:** $X = (0, 1)$ ve $U_n = (0 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n})$ olmak üzere $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ açık kümeler ailesi X kümesinin bir açık örtüsüdür.
- **Kapalı Örtü:** $X = [0, 1]$ ve $V_1 = [0, \frac{1}{2}]$, $V_2 = [\frac{1}{2}, 1]$ kapalı kümeleri verildiğinde, $\{V_1, V_2\}$ ailesi X kümesinin bir kapalı örtüsü olur.

Tanım 1.2.4 Bir X topolojik uzayı için, X uzayının her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa, yani her $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ açık örtüsü için,

$$X \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$$

koşulunu sağlayan sonlu sayıda $U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \dots, U_{\alpha_n}$ açık kümesi bulunabiliyorsa, X uzayına **kompakt uzay** denir.

Örnek 1.2.5 Reel sayıların kümesi $\mathbb{R}$, standart topolojisiyle (açık aralıklar topolojisi) kompakt değildir. Bunu göstermek için $\mathbb{R}$ uzayının bir açık örtüsünün sonlu bir alt örtü içermediğini göstereyim.

- $\mathbb{R}$ için aşağıdaki açık kümeler ailesini düşünelim:

$$U_n = (-n, n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

- Bu kümeler $\mathbb{R}$ uzayını örter, çünkü

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n.$$

- Bu örtüden herhangi bir sonlu alt örtü seçersek, örneğin $U_{n_1}, U_{n_2}, \dots, U_{n_k}$, o zaman bu kümelerin birleşimi

$$\bigcup_{i=1}^k U_{n_i} = (-N, N) \quad (\text{burada } N = \max\{n_1, n_2, \dots, n_k\})$$

olur. Bu, $(-N, N)$ aralığını kapsar, ancak $\mathbb{R}$ uzayının tamamını kapsamaz. Dolayısıyla, sonsuzda kalan noktalar örtülememiş olur.

- Sonuç olarak, bu açık örtü için hiçbir sonlu alt örtü $\mathbb{R}$ uzayını tamamen örtemez.

Bu, $\mathbb{R}$ kümesinin alışılmış topoloji ile kompakt uzay olmadığını gösterir.

Örnek 1.2.6 $\mathbb{R}$ reel sayılar üzerinde sonlu tümleyenler topolojisi verilsin. Bir A kümesinin bu uzayda açık küme olması için gerek ve yeter şart $A = \emptyset$ veya $\mathbb{R} \setminus A$ kümesinin sonlu olmasıdır.

Şimdi, $\mathbb{R}$ uzayının sonlu tümleyenler topolojisi altında kompakt uzay olduğunu göstermek için her açık örtüsünün sonlu bir sonlu alt örtüye sahip olduğunu gösterelim.

Bir açık örtü $\{A_i\}_{i \in I}$ olsun.

$$\mathbb{R} \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$$

$\{A_i\}_{i \in I}$ ailesi $\mathbb{R}$ için örtü olduğundan bu kümelerden en az biri boş kümeden farklıdır. Bu açık küme diyelim ki A_j olsun. A_j açık küme olduğundan $\mathbb{R} \setminus A_{j_0}$ sonlu bir küme olur. Buradan

$$\mathbb{R} \setminus A_{j_0} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

olduğundan

$$\mathbb{R} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \cup A_{j_0}$$

yazılabilir. Bu noktaların her biri başka bir açık kümenin içinde yer alacak şekilde açık kümeler seçelim. Örneğin $A_{j_0} = \{a_2\}$ alınırsa $\mathbb{R} \setminus A_{j_0} = \{a_2\}$ sonlu olduğundan A_{j_0} kümesi açık bir kümedir ve a_1 noktasını içerir. Bu şekilde devam ederek her a_i noktası için en az bir A_{j_n} açık kümesi bulabiliriz. Buradan

$$\mathbb{R} = \underbrace{\{A_{j_0}, A_{j_1}, \dots, A_{j_n}\}}_{n \text{ tane}} \cup A_j$$

yazabiliriz. Sonuç olarak, $\mathbb{R}$ uzayını en fazla $n + 1$ tane açık küme ile örtmüş oluruz. Her açık örtü sonlu bir alt örtü içerdiğinden, $\mathbb{R}$ uzay sonlu tümleyenler topolojisi ile kompakt uzay olur.

Sonuç 1.2.7 Yukarıdaki iki örnekten görüldüğü gibi, bir kümenin kompakt olup olmaması yalnızca kümenin kendisine değil, üzerinde tanımlı olan topolojiye de bağlıdır.

Teorem 1.2.8 $[a, b] \subset \mathbb{R}$ kapalı aralığı standart topoloji ile kompakt uzay olur.

İspat. Kompaktlığı göstermek için, $[a, b]$ aralığının her açık örtüsünden sonlu bir alt örtü seçilebildiğini gösterelim.

Verilen bir açık örtü

$$\{U_i\}_{i \in I} \quad \text{öyle ki} \quad [a, b] \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i.$$

olsun. Şimdi, aşağıdaki küme ailesini tanımlayalım

$$S = \{x \in [a, b] \mid x > a \text{ ve } [a, x] \text{ sonlu sayıda } U_i \text{ kümeleri ile örtülebilir}\}$$

Bu kümenin bazı önemli özelliklerini inceleyelim:

- **Boş olmadığını gösterelim:** a noktası örtüldüğü için, $a \in U_j$ olacak şekilde bir $j \in I$ vardır. Açık küme tanımına göre, U_j kümesi a etrafında bir ϵ -komsuluğu içerir. Yani, $[a, a + \delta) \subseteq U_j$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır. Bu, $a + \frac{\delta}{2} \in S$ olduğu anlamına gelir. Bu yüzden $S \neq \emptyset$.
- **Üst sınırlı olduğunu gösterelim:** $S \subseteq [a, b]$ olduğundan, S kümesi üstten sınırlıdır.
- **Üst sınırını bulalım:** $c = \sup S$ (üst sınır) tanımlıdır ve $a \leq c \leq b$ koşulunu sağlar. $c = b$ olduğunu gösterelim.
- **$c < b$ olamaz:** Eğer $c < b$ olsaydı, $c \in U_k$ olacak şekilde bir $k \in I$ olurdu. Açık küme tanımından, U_k kümesi c etrafında bir δ -komsuluğu içerir:

$$[c, c + \delta) \subseteq U_k.$$

Fakat $c = \sup S$ olduğundan, $c + \frac{\delta}{2}$ değeri S kümesine dahil olmalıdır. Bu ise c noktasının supremum olduğu varsayımıyla çelişir. Dolayısıyla $c = b$ olmalıdır.

Son olarak, b noktası da kapsandığından, $[a, b]$ kümesi gerçekten de her açık örtüden bir sonlu alt örtü seçmeye izin veren bir yapıya sahiptir. Bu ise $[a, b]$ aralığının kompakt olduğunu kanıtlar. $\square$

Teorem 1.2.9 Eğer K kompakt bir topolojik uzay ve

$$f : K \rightarrow \mathbb{R}$$

sürekli bir fonksiyon ise, o zaman f sınırlıdır.

İspat. $\mathbb{R}$ üzerinde şu açık aralıkları ele alalım:

$$\dots, (i-1, i+1), (i, i+2), (i+1, i+3), \dots$$

Bu aralıklar $\mathbb{R}$ için bir açık örtü oluşturur, çünkü her $x \in \mathbb{R}$ en az bir aralığın içinde bulunur. f fonksiyonu sürekli olduğundan, her aralığın öngörüntüsü de açıktır. Buradan

$$\{f^{-1}(i, i+2)\}_{i \in \mathbb{Z}}$$

kümesi K için bir açık örtü oluşturur.

K kompakt olduğu için, bu açık örtüden sonlu bir alt örtü seçebiliriz:

$$f^{-1}(i_1, i_1+2), \dots, f^{-1}(i_n, i_n+2).$$

Bunlar hala K kümesini örtmelidir, yani

$$K \subseteq f^{-1}(i_1, i_1+2) \cup \dots \cup f^{-1}(i_n, i_n+2)$$

olmalıdır. Bu, $f(K)$ kümesinin sonlu sayıda açık aralık içinde kaldığını gösterir:

$$f(K) \subseteq (i_1, i_1+2) \cup \dots \cup (i_n, i_n+2).$$

Bu nedenle, $f(K)$ alt ve üst sınırlara sahip olduğundan f sınırlıdır. □

Örnek 1.2.10 $f(x) = x$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde sınırsız olduğundan $\mathbb{R}$ uzayı alışılmış topoloji ile kompakt olamaz, çünkü kompakt olsaydı

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

sürekli olan tüm fonksiyonlar sınırlı olurdu.

Lemma 1.2.11 Birim çember S^1 kompakttır.

İspat. Kompakt olduğunu bildiğimiz $[0, 1]$ aralığı ile ilişkilendirerek gösterelim.

$$\begin{aligned} e : [0, 1] &\rightarrow S^1 \\ t &\mapsto e(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \end{aligned}$$

fonksiyonu süreklidir ve S^1 üzerine örtendir. U ailesi S^1 için herhangi bir açık örtü olsun. Her $Q \in U$ için, f sürekli olduğundan $f^{-1}(Q)$ kümesi $[0, 1]$ içinde açık bir küme olur. Böylece, $\{f^{-1}(Q) \mid Q \in U\}$ ailesi $[0, 1]$ için açık bir örtü olur.

$[0, 1]$ kompakt olduğundan, bu açık örtü sonlu bir alt örtüsü $[0, 1]$ aralığını örter. Yani, V sonlu sayıda açık kümeden oluşan bir alt aile olmak üzere

$$\bigcup_{Q \in V} f^{-1}(Q)$$

olur. Böylece, V ailesi S^1 için U örtüsünün sonlu bir alt örtüsü olur. Gerçekten de, $x \in S^1$ için f örten olduğundan $x = f(y)$ olacak şekilde bir $y \in [0, 1]$ vardır. $[0, 1]$ aralığı $\bigcup_{Q \in V} f^{-1}(Q)$ tarafından örtüldüğünden, y en az bir $f^{-1}(Q)$ kümesinin elemanıdır. Bu durumda, $f(y) \in Q$ olur ve dolayısıyla $x \in Q$ sağlanır.

Böylece, S^1 de bulunan her nokta V ailesine ait en az bir kümenin içinde yer almaktadır. Bu ise V ailesinin S^1 için U ailesinin sonlu bir alt örtüsü olduğunu gösterir. Sonuç olarak, S^1 kompakt bir uzaydır. $\square$

Sonuç 1.2.12 *Herhangi bir*

$$f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$$

sürekli fonksiyonu sınırlıdır.

Örnek 1.2.13 $(0, 1)$ açık aralığının kompakt olmadığını gösterelim.

Her $n > 1$ tamsayıları için açık kümeleri

$$U_2 = \left(\frac{1}{2}, 1\right), \quad U_3 = \left(\frac{1}{3}, 1\right), \quad \dots, \quad U_n = \left(\frac{1}{n}, 1\right), \quad \dots$$

şeklinde tanımlayalım.

Bu kümeler $(0, 1)$ kümesini örter, çünkü herhangi bir x reel sayısı 0 ile 1 arasında ise, yeterince büyük bir n tamsayısı için x aynı zamanda $(1/n, 1)$ aralığında da yer alır.

Ancak, bu açık örtünün herhangi bir sonlu alt örtüsünü alırsak, örneğin $U_{i_1}, \dots, U_{i_k}$, bu sonlu alt örtü $(0, 1)$ kümesini kapsamaz. Çünkü bu sonlu birleşim yalnızca

$$U_i = \left(\frac{1}{i}, 1\right)$$

kümesini verir, burada $i = \max(i_1, \dots, i_k)$. Ancak, $(0, 1)$ kümesindeki bazı noktalar, örneğin $1/i$, bu birleşime dahil değildir. Dolayısıyla bu örtünün herhangi bir sonlu alt örtüsü de $(0, 1)$ aralığını örtemez. Sonuç olarak $(0, 1)$ aralığı kompakt değildir.

Önerme 1.2.14 $f : X \rightarrow Y$ sürekli bir fonksiyon ve X kompakt bir küme ise, $f(X)$ kümesi de kompakt olur.

İspat. $f(X)$ için açık bir örtü $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ olsun. f sürekli olduğu için, her V_α açık kümesinin ön görüntüsü $f^{-1}(V_\alpha)$, X içinde açık bir kümedir. Bu durumda, $\{f^{-1}(V_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ kümesi X için bir açık örtü olur.

X kompakt olduğundan, bu açık örtüden sonlu bir alt örtü seçilebilir, yani

$$f^{-1}(V_{\alpha_1}), f^{-1}(V_{\alpha_2}), \dots, f^{-1}(V_{\alpha_n})$$

kümeleri X kümesini örter. Buradan

$$f(f^{-1}(V_{\alpha_1})) \cup f(f^{-1}(V_{\alpha_2})) \cup \dots \cup f(f^{-1}(V_{\alpha_n})) \subseteq V_{\alpha_1} \cup V_{\alpha_2} \cup \dots \cup V_{\alpha_n}$$

olacağından $f(f^{-1}(V_\alpha)) \subseteq V_\alpha$ olduğu için, bu kümeler $f(X)$ kümesini de örter. Bu, $f(X)$ için sonlu bir açık alt örtü elde ettiğimiz anlamına gelir ki bu, $f(X)$ kümesinin kompakt olduğunu gösterir. $\square$

Sonuç 1.2.15 *Kompakt bir uzaydan kompakt olmayan bir uzaya sürekli örten dönüşüm yoktur. Örneğin*

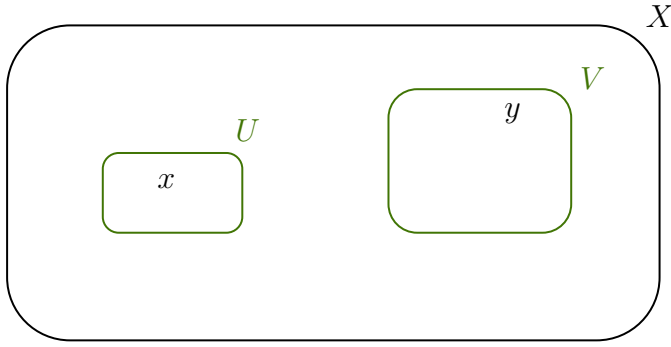
$$[0, 1] \rightarrow (0, 1)$$

şeklinde örten sürekli dönüşüm yoktur.

Teorem 1.2.16 (Heine–Borel Teoremi) $\mathbb{R}^n$ uzayının bir alt uzayının kompakt olması için gerek ve yeter şart kapalı ve sınırlı olmasıdır.

1.3 Hausdorff Özelliği

Tanım 1.3.1 *Bir X topolojik uzayı, eğer her farklı $x, y \in X$ noktaları için $x \in U$, $y \in V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde açık $U, V \subseteq X$ kümeleri varsa, Hausdorff olarak adlandırılır.*



$$\begin{aligned} \forall x, y \in X \\ \exists U, V \quad \ni U \cap V = \emptyset \end{aligned}$$

Örnek 1.3.2 *Tek noktadan oluşan $X = \{x\}$ uzayının Hausdorff olduğunu gösterelim.*

Hausdorff uzay olabilmek için, farklı iki noktayı ayıran ayırık açık kümeler bulunmalıdır. Ancak, X yalnızca tek bir noktadan oluştuğundan, X içinde farklı iki nokta yoktur. Boş önermenin doğru olduğu kabul edildiğinden, X Hausdorff uzay olur.

Not. Bu bölümde aksi belirtilmediği sürece, bir X uzayının birden fazla nokta içerdiğini varsayacağız. □

Örnek 1.3.3 $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$, alışılmış uzayının Hausdorff uzay olduğunu gösterelim.

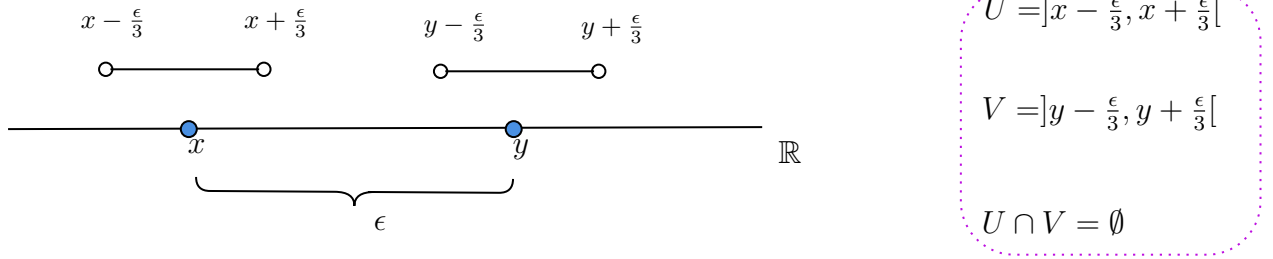
Hausdorff uzay tanımına göre, eğer $x, y \in \mathbb{R}$ ve $x \neq y$ ise, öyle $U, V \subseteq \mathbb{R}$ açık kümeleri vardır ki $x \in U$, $y \in V$ ve $U \cap V = \emptyset$ sağlanır.

Gerçekten de, $x \neq y$ ise $\varepsilon = |x - y|$ seçelim. Buradan

$$U = \left(x - \frac{\varepsilon}{3}, x + \frac{\varepsilon}{3}\right), \quad V = \left(y - \frac{\varepsilon}{3}, y + \frac{\varepsilon}{3}\right)$$

açık kümeleri x ve y noktalarını içerir ve $U \cap V = \emptyset$ olduğu açıktır.

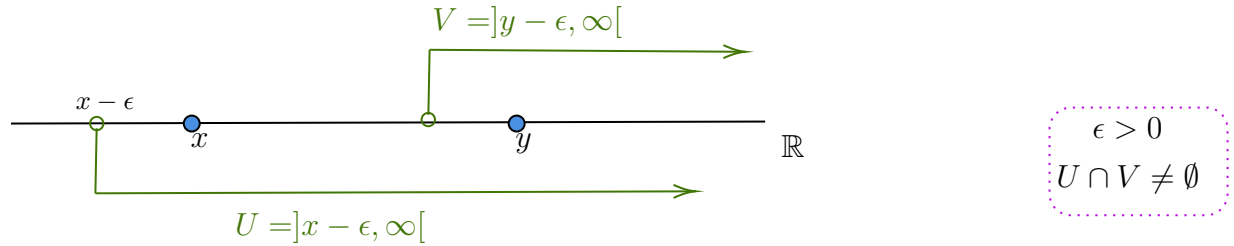
Sonuç olarak, $\mathbb{R}$ Hausdorff uzaydır.



Örnek 1.3.4 $\mathbb{R}$ üzerinde sağ ışın topolojisini ele alalım. Sağ ışın uzayında bir noktanın komşulukları, o noktayı içeren ve $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $]a, \infty[$ şeklinde olan kümelerdir.

Hausdorff uzay olabilmesi için, her $x \neq y$ çifti için ayrık açık kümeler bulunabilmelidir. Ancak, $x < y$ olduğunda, x noktasını içeren her açık küme her $\epsilon > 0$ için $]x - \epsilon, \infty[$ şeklinde olup y noktasını da içerir. Bu durumda x ve y noktalarını ayıran iki ayrık açık küme bulunamaz.

Örneğin, $x = 1$ ve $y = 2$ seçildiğinde, 1 noktasını içeren herhangi bir açık küme $]1 - \epsilon, \infty[$ şeklinde olmak zorundadır ve bu küme 2 noktasını da içerir. Bu yüzden sağ ışın uzayı Hausdorff değildir.



Sonuç 1.3.5 Hausdorff özelliği topolojiye bağlıdır. Aynı küme, farklı topolojiler altında Hausdorff olabilir veya olmayabilir.

Önerme 1.3.6 X Hausdorff uzayı ve $f : X \rightarrow X$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere sabit nokta kümesi

$$\text{Fix}(f) = \{x \in X \mid f(x) = x\}$$

X içinde kapalı bir alt kümedir.

İspat. Bir kümenin kapalı olduğunu göstermek için tümleyeninin açık olduğunu göstermek yeterlidir. Sabit nokta kümesinin tümleyeninde bir y noktası alalım. Yani $y \notin \text{Fix}(f)$, dolayısıyla $f(y) \neq y$ olur. Bu durumda, X Hausdorff olduğu için, y ve $f(y)$ noktalarını içeren ayrık açık kümeler vardır; yani $y \in U$ ve $f(y) \in V$ olacak şekilde U, V açık kümeleri bulunur ve $U \cap V = \emptyset$ olur.

f sürekli olduğu için $f^{-1}(V)$ kümesi açıktır. O halde $U \cap f^{-1}(V)$, y elemanını içeren açık bir kümedir. Ayrıca, bu küme $\text{Fix}(f)$ ile kesişmez. Gerçekten, eğer $x \in U \cap f^{-1}(V)$

ve $f(x) = x$ olsaydı, $x \in f^{-1}(V)$ olduğundan $f(x) \in V$ olurdu. Aynı zamanda $x \in U$ olduğundan ve $f(x) = x$ olduğundan $f(x) \in U$ da olurdu. Böylece $f(x) \in U \cap V$ elde edilir, ancak $U \cap V = \emptyset$ olduğundan bu bir çelişkidir. Yani her $y \in X - \text{Fix}(f)$ için

$$y \in \underbrace{U \cap f^{-1}(V)}_{\emptyset} \subset X - \text{Fix}(f)$$

olacağından her y noktası $X - \text{Fix}(f)$ kümesinin iç noktası olur. $X - \text{Fix}(f)$ kümesinin her noktası iç nokta olduğundan $X - \text{Fix}(f)$ kümesi açık küme dolayısıyla tümleyeni $\text{Fix}(f)$ kapalı küme olur.

□

Sonuç 1.3.7 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $f(x) \neq x$ ise, sabit nokta içermeyen bir açık aralık $(x-\delta, x+\delta)$ (pozitif yarıçaplı bir δ ile) bulunur. Başka bir deyişle, $y \in (x-\delta, x+\delta)$ için $f(y) \neq y$ olur.

$f(x) \neq x$ olan noktaların kümesi $\text{Fix}(f)$ tümleyenidir. $\mathbb{R}$ Hausdorff bir uzay olduğu için, önceki önermeye göre $\text{Fix}(f)$ kapalıdır. Dolayısıyla, sabit nokta içermeyen noktaların kümeleri açık küme olur.

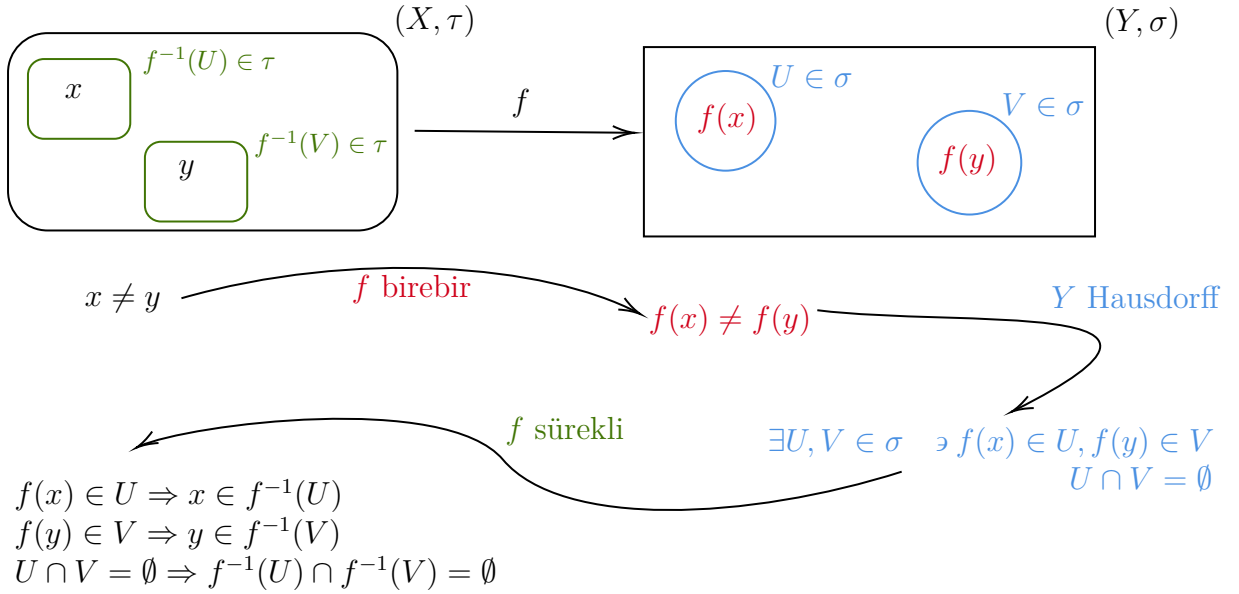
Önerme 1.3.8 $f : X \rightarrow Y$ sürekli ve birebir bir fonksiyon ve Y Hausdorff ise X Hausdorff uzay olur.

İspat. $x \neq y$ olmak üzere $x, y \in X$ alalım. f birebir olduğu için, $f(x)$ ve $f(y)$ de Y içinde farklı noktalardır. Y Hausdorff olduğu için, $f(x)$ ve $f(y)$ noktalarını ayıran açık kümeler $U, V \subset Y$ vardır; yani $f(x) \in U$, $f(y) \in V$ ve $U \cap V = \emptyset$ yazılabilir.

f sürekli olduğundan, $f^{-1}(U)$ ve $f^{-1}(V)$ açık kümelerdir. Ayrıca, $x \in f^{-1}(U)$ ve $y \in f^{-1}(V)$ sağlanır. Son olarak,

$$f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

olduğundan, X Hausdorff uzaydır.



□

Örnek 1.3.9 Kaba uzayın $(\emptyset, X)$ Hausdorff olmadığını gösterelim.

Hausdorff olması için her $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için, x ve y noktalarını ayıran ayrık açık kümeler bulmamız gerekir. Ancak kaba uzayda X ve $\emptyset$ dışında başka açık küme bulunmadığından, herhangi iki farklı noktayı ayrık açık kümelerle ayırmak mümkün değildir.

Bu nedenle, kaba uzay Hausdorff değildir.

Örnek 1.3.10 Ayrık topolojiye sahip bir uzayın Hausdorff olduğunu gösterelim.

Ayrık X uzayında her alt küme açık kümedir. İki farklı $x, y \in X$ seçelim. Ayrık topolojide her $\{x\}$ ve $\{y\}$ kümeleri açık kümelerdir ve

$$\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$$

olduğundan, bu açık kümeler x ve y noktalarını ayırır.

Dolayısıyla, ayrık topoloji Hausdorff özelliğini sağlar.

Sonuç 1.3.11 Topoloji inceldikçe/(*kabalaştıkça*) Hausdorff olma özelliği artar/(*azalır*).

Örnek 1.3.12 $X = \{a, b, c\}$ olsun. Aşağıdaki topolojiler altında X uzayının Hausdorff olup olmadığını inceleyelim:

1. $\tau_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$

b ve c noktalarını ayıran ayrık açık kümeler bulunamaz. Bu nedenle, X uzayın τ_1 topolojisi ile Hausdorff değildir.

2. $\tau_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

b ve c noktalarını ayıran ayrık açık kümeler bulunamaz. Bu nedenle, X uzayın τ_2 topolojisi ile Hausdorff değildir.

3. $\tau_3 = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{c\}, \{a, b, c\}\}$

b ve c noktalarını ayıran ayrık açık kümeler bulunamaz. Bu nedenle, X uzay τ_3 topolojisi ile Hausdorff değildir. .

Sonuç olarak, verilen üç topolojinin hiçbiri X uzayını Hausdorff yapmaz.

Örnek 1.3.13 $\mathbb{Z}$ kümesi üzerine indirgenen alıılmış topolojinin Hausdorff olduğunu üç farklı yöntemle gösterelim:

1. $\mathbb{Z}$ üzerine indirgenen topoloji ayrık uzay olur (Örnek1.1.21). Birden fazla nokta içeren ayrık topoloji Hausdorff uzaydır (Örnek1.3.10).

2. İki farklı nokta seçerek Hausdorff özelliğini gösterelim.

Herhangi iki farklı $x, y \in \mathbb{Z}$ noktası alalım. İndirgenmiş topolojide $\mathbb{Z}$ uzayında her altkümesi açık olduğundan, $U = \{x\}$ ve $V = \{y\}$ açık kümeleri x ve y noktalarını ayırır ve $U \cap V = \emptyset$ sağlanır. Bu, $\mathbb{Z}$ uzayının Hausdorff olduğunu gösterir.

3. Hausdorff bir uzaya sürekli ve birebir bir fonksiyon tanımlayarak gösterelim. (Önerme1.3.8) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x \in \mathbb{Z}$ için $f(x) = x$ olarak tanımlayalım. Bu fonksiyon sürekli (Tanım kümesinde ayrık topoloji varsa fonksiyon her zaman sürekli). $\mathbb{R}$ Hausdorff uzay olduğundan, $\mathbb{Z}$ uzayda Hausdorff olmak zorundadır.

Bu üç farklı yöntemle $\mathbb{Z}$ 'nin Hausdorff olduğunu kanıtlamış olduk.

Bölüm 2

Çözümleyici Topoloji

2.1 Homeomorfizm

X ve Y uzaylarının topolojik olarak özdeş olması için, bu uzaylar arasında birebir bir eşleme olmalı ve bu eşleme, X ve Y uzaylarının açık kümeleri arasında da birebir bir eşleme sağlamalıdır.

- X uzayını tanım kümesi olarak alan her sürekli fonksiyon, Y uzayını tanım kümesi olarak alan bir sürekli fonksiyonla eşlenebilir ve tersi de geçerlidir.
- Benzer şekilde, X uzayını değer kümesi olarak alan her sürekli fonksiyon, Y uzayını değer kümesi olarak alan bir sürekli fonksiyonla eşlenebilir ve tersi de geçerlidir.

Süreklilik, topolojiye bağlı olarak tanımlandığından, bu koşul X ve Y uzaylarının tüm topolojik bağlamlarda birbirinin yerine kullanılabileceğini gösterir.

Tanım 2.1.1 (Homeomorf Uzaylar) X ve Y iki uzay olmak üzere eğer

$$f \circ g = Id_Y \quad \text{ve} \quad g \circ f = Id_X$$

olacak şekilde sürekli $f : X \rightarrow Y$ ve $g : Y \rightarrow X$ dönüşümleri varsa, bu uzaylara **homeomorf** denir ve $X \cong Y$ ile gösterilir. f ve g dönüşümlerine **homeomorfizm** denir.

Not. Homeomorfizm, iki topolojik uzayın "topolojik olarak özdeş" olduğunu gösterir. Bu, uzayların topolojik özelliklerinin aynı olduğu anlamına gelir. $\square$

Örnek 2.1.2 (Açık Aralıkların Homeomorfizmi) Reel ekseninde herhangi iki açık aralık homeomorftur. Örneğin, $X = (-2, 3)$ ve $Y = (1, 7)$ aralıkları için, $f : X \rightarrow Y$ ve $g : Y \rightarrow X$ dönüşümlerini

$$f(x) = \frac{6}{5}(x + 2) + 1, \quad g(x) = \frac{5}{6}(x - 1) - 2$$

ile tanımlanayalım. Bu dönüşümler toplama ve çarpma işlemlerinin bileşkesi olduğundan süreklidir. Ayrıca

$$f(g(x)) = f\left(\frac{5}{6}(x-1) - 2\right) = \frac{6}{5}\left(\frac{5}{6}(x-1) - 2 + 2\right) + 1 = x = Id_Y(x)$$

ve

$$g(f(x)) = g\left(\frac{6}{5}(x+2) + 1\right) = \frac{5}{6}\left(\frac{6}{5}(x+2) + 1 - 1\right) - 2 = x = Id_X(x)$$

olduğundan

$$f \circ g = Id_Y \quad \text{ve} \quad g \circ f = Id_X$$

elde edilir. f ve g homeomorfizmler olduğundan, $(-2, 3)$ ve $(1, 7)$ aralıkları homeomorf olurlar.

Örnek 2.1.3 ($\mathbb{R}$ ve $(-1, 1)$ Arasındaki Homeomorfizm) $\mathbb{R}$ ve $(-1, 1)$ aralığı homeomorfudur. Bu homeomorfizmi $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

ve $g : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$

$$g(x) = \frac{2}{\pi} \arctan(x)$$

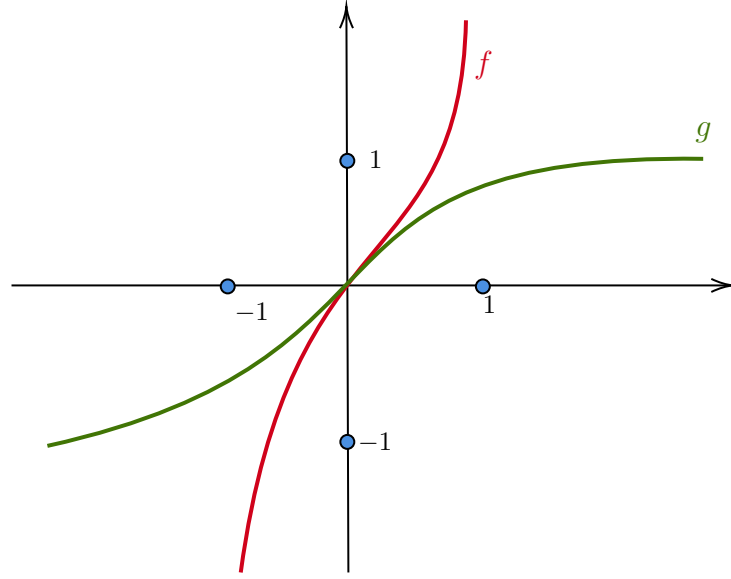
ile tanımlayabiliriz. f ve g dönüşümleri, trigonometrik fonksiyonların bileşkesi olduğundan süreklidir. Ayrıca

$$f(g(x)) = \tan\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{\pi} \arctan(x)\right) = \tan(\arctan(x)) = x = Id_{\mathbb{R}}(x)$$

ve

$$g(f(x)) = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi x}{2} = x = Id_{(-1,1)}(x)$$

olduğundan $\mathbb{R}$ ve $(-1, 1)$ homeomorf olur.



Diyagramdan görüleceği gibi, f fonksiyonu $(-1, 1)$ aralığını $\mathbb{R}$ uzayına g fonksiyonu $\mathbb{R}$ uzayını $(-1, 1)$ aralığına sürekli ve birebir olarak eşler.

Önerme 2.1.4 X herhangi bir topolojik uzay ise, $(-1, 1) \rightarrow X$ şeklindeki sürekli dönüşümler ile $\mathbb{R} \rightarrow X$ şeklindeki sürekli dönüşümler arasında birebir bir eşleme vardır. Benzer şekilde $X \rightarrow (-1, 1)$ şeklindeki sürekli dönüşümler ile $X \rightarrow \mathbb{R}$ şeklindeki sürekli dönüşümler arasında da birebir bir eşleme vardır.

İspat. $h : (-1, 1) \rightarrow X$ sürekli bir dönüşüm ise, $h \circ g : \mathbb{R} \rightarrow X$ de süreklidir. Burada $g : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$ dönüşümü

$$g(x) = \frac{2}{\pi} \arctan(x)$$

ile tanımlanabilir.

Tersine, eğer $j : \mathbb{R} \rightarrow X$ sürekli bir dönüşüm ise, $j \circ f : (-1, 1) \rightarrow X$ de süreklidir. Burada $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü

$$f(x) = \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

ile tanımlanabilir.

h dönüşümünü $h \circ g : \mathbb{R} \rightarrow X$ dönüşümüne dönüştürüp, sonra

$$(h \circ g) \circ f : (-1, 1) \rightarrow X$$

şeklinde dönüştürdüğümüzde, $h \circ (g \circ f) : (-1, 1) \rightarrow X$ elde ederiz. $g \circ f$, $(-1, 1)$ üzerinde birim dönüşüm olduğundan, bu h dönüşümüdür. Benzer şekilde, $(j \circ f) \circ g : \mathbb{R} \rightarrow X$, $f \circ g$ dönüşümü $\mathbb{R}$ üzerinde birim dönüşüm olduğundan, j dönüşümüdür.

Benzer şekilde, $k : X \rightarrow (-1, 1)$ dönüşümünden $f \circ k : X \rightarrow \mathbb{R}$ elde edilir. Tersine, $l : X \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümünden $g \circ l : X \rightarrow (-1, 1)$ elde edilir. Bu iki yapı da birbirinin tersidir. $\square$

Önerme 2.1.5 (Yansıyan Homeomorfizm) *Her topolojik uzay kendine homeomorftur.*

İspat. X herhangi bir topolojik uzay olmak üzere birim dönüşüm her $x \in X$ için

$$\text{Id}_X(x) = x$$

ile tanımlanır. X uzayının herhangi bir U açık kümesi için $\text{Id}_X^{-1}(U) = U$ açık olduğundan birim dönüşüm Id_X süreklidir. Ayrıca

$$\text{Id}_X \circ \text{Id}_X = \text{Id}_X.$$

olduğundan Id_X bir homeomorfizm olur. Sonuç olarak her X uzayı kendine homeomorftur denir. $\square$

Sonuç 2.1.6 *Homeomorf olma yansıma özelliğine sahiptir.*

Önerme 2.1.7 (Simetrik Homeomorfizm) *X homeomorf Y ise, Y homeomorf X olur.*

İspat. X homeomorf Y olduğunu varsayalım. Bu durumda, bir $f : X \rightarrow Y$ homeomorfizmi vardır. Tanım gereği, f süreklidir ve sürekli bir ters dönüşümü $f^{-1} : Y \rightarrow X$ için

$$f \circ f^{-1} = \text{Id}_Y \quad \text{ve} \quad f^{-1} \circ f = \text{Id}_X$$

sağlanır. f^{-1} sürekli olduğundan ve sürekli bir tersi f olduğundan, f^{-1} bir homeomorfizm olur. Buradan Y homeomorf X elde edilir. $\square$

Sonuç 2.1.8 *Homeomorf olma simetri özelliğine sahiptir.*

Önerme 2.1.9 (Homeomorfizmlerin Bileşkesi) *$f : X \rightarrow Y$ ve $g : Y \rightarrow Z$ birer homeomorfizm olmak üzere bileşke $g \circ f : X \rightarrow Z$ bir homeomorfizm olur.*

İspat.

$g \circ f$, iki sürekli dönüşümün bileşkesi olduğundan süreklidir. f ve g homeomorfizm olduğundan, **sürekli** ters dönüşümleri $f^{-1} : Y \rightarrow X$ ve $g^{-1} : Z \rightarrow Y$ vardır. Ayrıca iki sürekli fonksiyonun bileşkesi sürekli olacağından bileşke $f^{-1} \circ g^{-1}$ de süreklidir. Ayrıca

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ \text{Id}_Y = g \circ g^{-1} = \text{Id}_Z$$

ve

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = \text{Id}_X$$

olduğundan $(f^{-1} \circ g^{-1}, g \circ f)$ dönüşümünün tersidir. Sonuç olarak $g \circ f$ bir homeomorfizm olur. $\square$

Sonuç 2.1.10 *Homeomorf olma geçişme özelliğine sahiptir. Eğer $X \cong Y$ ve $Y \cong Z$ ise, o zaman $X \cong Z$ olur.*

$$X \cong Y \wedge Y \cong Z \Rightarrow X \cong Z$$

Sonuç 2.1.11 *Homeomorf olma denklik bağıntısıdır. Topolojik uzayları homeomorf olma ilişkisine göre sınıflandırabiliriz.*

Örnek 2.1.12 *Reel eksen üzerindeki herhangi bir açık aralık, $\mathbb{R}$ uzayının kendisiyle homeomorf olur.*

Çözüm:

$\mathbb{R} \cong (-1, 1)$ ve Reel eksen üzerindeki herhangi iki açık aralık homeomorf olduğundan herhangi bir (a, b) açık aralığı $(-1, 1)$ ile homeomorf olur.

Homeomorf olma bağıntısı geçişmeli olduğundan

$$(a, b) \cong (-1, 1) \cong \mathbb{R}$$

olmasından

$$(a, b) \cong \mathbb{R}$$

elde edilir. □

Örnek 2.1.13 *$[1, 2)$ ve $(-1, 0]$ aralıklarının homeomorf olduğunu gösterelim.*

$$f : [1, 2) \rightarrow (-1, 0]$$

fonksiyonu

$$f(x) = 1 - x$$

ile tanımlansın. f fonksiyonu

$$f(x_1) = f(x_2) \implies 1 - x_1 = 1 - x_2 \implies x_1 = x_2$$

olduğundan birebir ve $y \in (-1, 0]$ için

$$x = 1 - y \in [1, 2)$$

olduğundan örtendir. f fonksiyonunun tanımı gereği her $V \subset (-1, 0]$ açık kümesi için $f^{-1}(V)$ öngörüntüsü $[1, 2)$ uzayında açık kümedir.

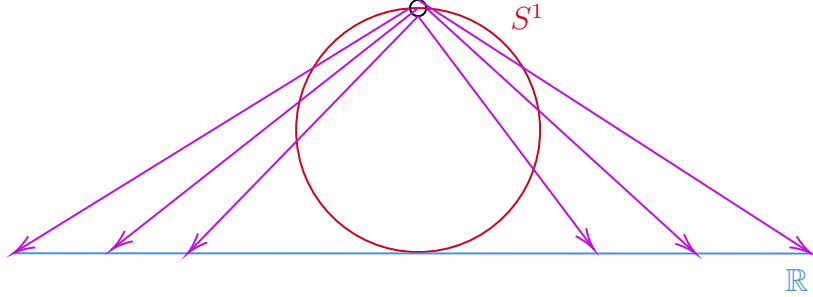
f fonksiyonunun tersi:

$$g(y) = 1 - y,$$

sürekli bir fonksiyondur. Benzer şekilde g fonksiyonunun sürekliliği gösterilebilir.

f sürekli, birebir ve örten fonksiyon olup, tersi de sürekli. Bu nedenle $[1, 2)$ ve $(-1, 0]$ homeomorf olur.

Örnek 2.1.14 S^1 çemberinden bir nokta çıkarıldığında, kalan uzay $\mathbb{R}$ ile homeomorftur. Benzer şekilde, S^2 küresinden bir nokta çıkarıldığında, kalan uzay $\mathbb{R}^2$ ile homeomorftur. Bu homeomorfizmleri göstermek için stereografik projeksiyon tekniğini kullanabiliriz.



S^1 çemberinden kuzey kutbunu, $(0, 1)$, çıkardığımızı düşünelim. Stereografik projeksiyon S^1 çemberindeki bir (x, y) noktası, $\mathbb{R}$ uzayındaki $\frac{2x}{1-y}$ noktasına eşlenir. Bu dönüşüm $y \neq 1$ olan noktalara uygulandığından süreklidir.

Tersine, $\mathbb{R}$ uzayındaki bir t noktası, S^1 çemberindeki $\left(\frac{4t}{t^2 + 4}, \frac{t^2 - 4}{t^2 + 4}\right)$ noktasına eşlenir.

Bu ters dönüşüm de süreklidir.

Stereografik projeksiyon, S^2 küresinin farklı bölgelerini $\mathbb{R}^2$ uzayının bölgeleriyle eşleştirmek için de kullanılabilir. S^2 küresinin güney yarıküresi (ekvator dahil), $\mathbb{R}^2$ uzayındaki kapalı bir disk ile homeomorftur. S^2 küresinin kuzey kutup dairesi'nin güneyindeki bölgesi (kuzey kutup dairesi hariç), $\mathbb{R}^2$ uzayındaki açık bir disk ile homeomorftur.

$\mathbb{R}$ uzayına ∞ noktası eklersek, $S^1 - \{(0, 1)\} \leftrightarrow \mathbb{R}$ homeomorfizmini $S^1 \leftrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ şeklinde genişletebiliriz. $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ üzerinde uygun bir topoloji tanımlayarak, bu genişletilmiş eşlemeyi bir homeomorfizm yapabiliriz.

Benzer şekilde, uygun bir topoloji ile S^2 ve $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ (veya $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$) arasında bir homeomorfizm tanımlanabilir. S^2 için bu model **Riemann küresi** olarak adlandırılır.

Örnek 2.1.15 (Bir Kare ile Bir Diskin Homeomorfizmi) Bir kare

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$$

ve disk

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

homeomorftur. Diskten kareye bir dönüşüm $f : D \rightarrow Q$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{\max(|x|, |y|)}(x, y), & \text{eğer } (x, y) \neq (0, 0), \\ (0, 0), & \text{eğer } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ve kareden diske dönüşüm $g : Q \rightarrow D$

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{\max(|x|, |y|)}{x^2 + y^2}(x, y), & \text{eğer } (x, y) \neq (0, 0), \\ (0, 0), & \text{eğer } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

olsun. f diski radyal olarak dışarı doğru iterek bir kare oluştururken g , kareyi radyal olarak içeri doğru çekerek bir disk oluşturur.

Q 'daki bir açık kümenin f altındaki ön görüntüsü D 'de açık ve D 'deki bir açık kümenin g altındaki ön görüntüsü Q 'da açık olduğundan f ile g sürekli dönüşümlerdir. Ayrıca

$$f(g(x, y)) = (x, y) = Id_Q(x, y) \quad \text{ve} \quad g(f(x, y)) = (x, y) = Id_D(x, y)$$

olduğundan f ve g birbirinin tersidir. f ve g homeomorfizm olduğundan, Q ve D homeomorftur.

Örnek 2.1.16 Bir

$$[0, 1]^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x, y, z \leq 1\}$$

ile verilen küp

$$G := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

3-küresi homeomorftur.

İspat. Bir homeomorfizm tanımlamak için, küpü önce $[-1, 1]^3$ aralığına genişletip, ardından bu aralığı dolu 3-küreye projekte edeceğiz.

$$f : [0, 1]^3 \rightarrow \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

fonksiyonunu

$$f(x, y, z) = \frac{(2x - 1, 2y - 1, 2z - 1)}{\max\{|2x - 1|, |2y - 1|, |2z - 1|, 1\}}$$

ile tanımlayalım.

$g : [0, 1]^3 \rightarrow [-1, 1]^3$, $g(x, y, z) = (2x - 1, 2y - 1, 2z - 1)$ fonksiyonu sürekli ve lineerdir. Ayrıca, $h : [0, 1]^3 \rightarrow G$

$$h(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{\max\{|x|, |y|, |z|, 1\}}.$$

fonksiyonu da sürekli. $f(x, y, z) = h(g(x, y, z))$ olduğundan, f sürekli.

Her $(x, y, z) \in [0, 1]^3$ noktası, 3-kürede bir ve yalnız bir noktaya eşlendiğinden birebir ve 3-küredeki her nokta, $[0, 1]^3$ den bir noktadan geldiğinden örtendir.

f fonksiyonunun tersi :

$$f^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+1}{2}, \frac{z+1}{2} \right)$$

sürekli olduğundan, f bir homeomorfizm olur. f sürekli, birebir ve örten bir fonksiyon olup, tersi de sürekli. Bu nedenle $[0, 1]^3$ ve 3-küre homeomorftur. $\square$

Örnek 2.1.17 *n-boyutlu disk*

$$D^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1\}$$

ve *n-boyutlu küp*

$$[0, 1]^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_i \leq 1\}$$

homeomorftur.

Örnek 2.1.18 *Bir*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

halkası ve bir

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

silindiri homeomorftur. $f : C \rightarrow A$ ve $g : A \rightarrow C$ fonksiyonlarını

$$f : C \rightarrow A, \quad f(x, y, z) = ((1+z)x, (1+z)y),$$

ve

$$g : A \rightarrow C, \quad g(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \sqrt{x^2 + y^2} - 1 \right).$$

ile tanımlayalım.

f ve g birebir ve

$$f(g(x, y)) = (x, y) = Id_A(x, y), \quad g(f(x, y, z)) = (x, y, z) = Id_C(x, y, z)$$

olduğundan birbirinin tersidir. Ayrıca $(1+z)x, (1+z)y, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$ ve $\sqrt{x^2 + y^2} - 1$ sürekli fonksiyonlar olduklarından f ve g fonksiyonları süreklidir.

f ve g sürekli, birebir ve örten fonksiyonlardır. Ayrıca, f ve g birbirinin tersidir. Bu nedenle A halkası ve C silindiri homeomorftur.

Örnek 2.1.19 *Bir donut, bir çay fincanı ile homeomorftur. Donut üzerindeki delik, çay fincanının kulbuna karşılık gelir. Çay fincanının geri kalanı, tıpkı bir kareden bir diskin oluşturulması sırasında köşelerin "kaybolması" gibi, homeomorfizm yoluyla "kaybolur". Bu nedenle, topologların bir donut ile bir çay fincanını ayırt edemediği söylenir.*

Örnek 2.1.20 *Birden fazla nokta içeren X ve Y uzayları için X üzerinde kaba topoloji ve Y üzerinde ayrık topoloji varsa X ve Y arasında bir homeomorfizm tanımlanamaz.*

f : X → Y birebir bir fonksiyon olsun.

$$f : (X, \{\emptyset, X\}) \rightarrow (Y, \mathcal{P}(Y))$$

f fonksiyonu kaba topolojiden ayrık topolojiye sürekli olabilmesi için, ayrık topolojideki her açık kümenin ön görüntüsünün kaba topolojide açık olması gerekir. a ∈ Y alalım. Ayrık

topolojideki $\{a\}$ açık kümedir. f birebir bir fonksiyon olduğundan, $\{a\}$ 'nın ön görüntüsü yine tek nokta kümesi olur. Kaba topolojide tek nokta kümesi açık küme olmayacağından f sürekli olamaz.

Bu nedenle, f homeomorfizm olamaz.

Sonuç 2.1.21 Birden fazla nokta içeren X uzayı için $(X, \{\emptyset, X\})$ ve $(X, \mathcal{P}(X))$ uzayları arasında homeomorfizm tanımlanamaz.

Not. Birden fazla nokta içeren X ve Y uzayları için

$$f : (X, \{\emptyset, X\}) \rightarrow (Y, \mathcal{P}(Y))$$

fonksiyonunun sürekli olması sadece sabit fonksiyon için mümkün olur. Sabit bir fonksiyonun tersi fonksiyon olmayacağından (çünkü tek noktayı birden fazla noktaya götürür) bir homeomorfizm tanımlanamaz. $\square$

Sonuç 2.1.22 $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ her fonksiyon sürekli olmasına rağmen (tanım kümesinde ayrık uzay olduğundan) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ sadece sabit fonksiyon süreklidir. Sabit fonksiyonun tersi fonksiyon olmayacağından $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{R}$ arasında homeomorfizm tanımlanamaz. Benzer şekilde $\mathbb{N}$ ve S^0 uzayları ile $\mathbb{R}$ ile arasında homeomorfizm tanımlanamaz.

Örnek 2.1.23 $[0, 1]$ aralığı **kompakt** bir uzaydır. $f : [0, 1] \rightarrow (0, 1)$ bir homeomorfizm ise sürekli ve örten olacağından $(0, 1)$ aralığının kompakt olması ile çelişki elde edilir. Dolayısıyla $[0, 1]$ ve $(0, 1)$ arasında bir homeomorfizm tanımlanamaz.

Örnek 2.1.24 Birim çember S^1 kompakt olduğundan $S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı her sürekli fonksiyon sınırlıdır. Ancak, $\mathbb{R}$ sınırsız bir uzay olduğundan, $S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon **örten** olamaz. Birim çember S^1 ile $\mathbb{R}$ homeomorf değildir.

Önerme 2.1.25 Eğer X ve Y uzayları homeomorf ise

1. X bağlantılı ise, Y de bağlantılı olur.
2. X kompakt ise, Y de kompakt olur.
3. X Hausdorff ise, Y de Hausdorff olur.

İspat. 1. Bağlantılılık: X ve Y homeomorf olduğundan, $f : X \rightarrow Y$ bir homeomorfizmdir ve dolayısıyla sürekli ve örten. Bağlantılı bir uzaydan bağlantılı olmayan bir uzaya sürekli bir örten fonksiyon tanımlanamaz. Bu nedenle, Y bağlantılı uzay olur.

2. Kompaktlık: $f : X \rightarrow Y$ bir homeomorfizm olduğundan, f sürekli ve birebirdir. Kompakt bir uzayın sürekli fonksiyon ile görüntüsü kompakttır. f bir homeomorfizm olduğundan, $f(X) = Y$ olur. Bu nedenle, Y kompakt uzay olur.

3. Hausdorff Olma: $f : X \rightarrow Y$ bir homeomorfizm olduğundan, $f^{-1} : Y \rightarrow X$ de bir homeomorfizmdir ve dolayısıyla sürekli ve birebirdir. X Hausdorff olduğundan, Önerme 1.3.8 göre, Y de Hausdorff olur. $\square$

Sonuç 2.1.26 *Homeomorfizm olma özelliği topolojik özellikleri korur. Bağlantılılık, kompaktlık ve Hausdorff olma gibi özellikler topolojik özelliklerdir.*

Örnek 2.1.27 S^0 (0-küresi) bağlantısız ve S^1 (çember) bağlantılı olduğundan bu iki uzay homeomorf değildir.

Örnek 2.1.28 *Kapalı aralık $[0, 1]$ kompakt ve $\mathbb{R}$ kompakt olmadığından bu iki uzay homeomorf değildir.*

Örnek 2.1.29 $\mathbb{R}$ hausdorff $\mathbb{Q}$ hausdorff olmadığından bu iki uzay homeomorf değildir.

Örnek 2.1.30 *Çember S^1 ve kapalı aralık $[0, 1]$ homeomorf değildir.*

$[0, 1]$ aralığından bir nokta (örneğin $1/2$) çıkarıldığında, uzay bağlantısız hale gelir. S^1 çemberinden herhangi bir nokta çıkarıldığında, uzay hala bağlantılıdır.

Eğer S^1 ve $[0, 1]$ homeomorf olsaydı, bir noktayı çıkardıktan sonra da homeomorf kalmaları gerekirdi. Ancak bağlantılılık bu durumda korunmadığı için S^1 ve $[0, 1]$ homeomorf olamaz.

Sonuç 2.1.31 *Bir topolojik özelliğin her iki uzayda da bulunması veya her iki uzayda da bulunmaması, homeomorf olup olmadıklarını ayırt etmek için yeterli değildir. Homeomorf olmayan iki uzayı ayırt etmek için, bir uzayda bulunan ancak diğerinde bulunmayan bir topolojik özellik gereklidir.*

Lemma 2.1.32 *X kompakt bir uzay ve $U \subset X$ kapalı ise, U da kompaktır.*

İspat. U kümesinin herhangi bir açık örtüsünü ele alalım. U bir altuzay olduğundan, bu örtüdeki her küme, U ile X ile uzayında bulunan bir açık kümenin kesişimidir. Bu açık kümeler X uzayının bir açık örtüsünü oluşturmayabilir, ancak U kapalı olduğundan, $X - U$ kümesi açıktır. $X - U$ kümesini bu kümelerle eklersek, X uzayının bir açık örtüsünü elde ederiz.

X kompakt olduğundan, bu açık örtüden sonlu bir alt örtü seçebiliriz. Eğer $X - U$ kümesini bu sonlu alt örtüden çıkarır ve her kümeyi U ile kesiştirirsek, U kümesinin açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsünü elde ederiz. Bu nedenle, U kompakt olur. $\square$

Lemma 2.1.33 *Y Hausdorff bir uzay ve $V \subset Y$ kompakt bir altuzay ise, V kapalıdır.*

İspat. $Y - V$ kümesinin açık olduğunu gösterelim. $y \in Y - V$ ve $v \in V$ olmak üzere, y ve v farklı noktalar. Y Hausdorff olduğundan

$$y \in U_{y,v}, \quad v \in U_v, \quad \text{ve} \quad U_{y,v} \cap U_v = \emptyset$$

olacak şekilde $U_{y,v}$ ve U_v açık kümeleri vardır. Burada $v \in V$ noktası değiştikçe U_v ve $U_{y,v}$ açık kümeleri değişecektir. $v \in V$ için bu işlemi tekrarlayarak, V kümesini örten $\{U_v\}_{v \in V}$ açık küme ailesini elde ederiz. V kompakt olduğundan bu açık örtüden sonlu bir

$$U_{v_1}, U_{v_2}, \dots, U_{v_n}$$

alt örtü seçebiliriz. y için $U_{y,v_1}, U_{y,v_2}, \dots, U_{y,v_n}$ açık kümelerinin her biri y noktasını içerir ve V ile ayrıktır. Buradan

$$U_y = U_{y,v_1} \cap U_{y,v_2} \cap \dots \cap U_{y,v_n}$$

kümesi y noktasını içerir ve V ile ayrıktır.

Bu işlemi her $y \in Y - V$ için yaparak, $Y - V$ kümesini örten açık kümeler ailesi elde ederiz. Bu, $Y - V$ kümesinin açık olduğunu gösterir. Dolayısıyla, V kapalıdır. $\square$

Sonuç 2.1.34 *Hausdorff bir uzayın kompakt bir altuzayı kapalıdır.*

Lemma 2.1.35 *X ve Y iki topolojik uzay ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda, f sürekli olması için gerek ve yeter şart Y uzayının her kapalı alt kümesinin f altındaki ön görüntüsünün X uzayında kapalı olmasıdır.*

İspat. $(\Rightarrow)$ f sürekli olsun:

f sürekli olduğundan, Y uzayındaki her açık kümenin ön görüntüsü X uzayında açıktır. $U \subset Y$ kapalı bir küme olsun. Bu durumda $Y - U$ açıktır ve f sürekli olduğundan, $f^{-1}(Y - U)$ açıktır. Buradan $f^{-1}(Y - U) = X - f^{-1}(U)$ açık küme olur. Dolayısıyla $f^{-1}(U)$ tümleyeni açık olduğundan $f^{-1}(U)$ kapalıdır.

$(\Leftarrow)$ Her kapalı kümenin ön görüntüsü kapalı olsun.

$V \subset Y$ açık bir küme olsun. Bu durumda $Y - V$ kapalıdır. Varsayım gereği $f^{-1}(Y - V)$ kapalıdır. Buradan $f^{-1}(Y - V) = X - f^{-1}(V)$ olur. $f^{-1}(V)$ tümleyeni kapalı yani $f^{-1}(V)$ açıktır. Bu da f fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterir. $\square$

Teorem 2.1.36 *X kompakt bir uzay, Y Hausdorff bir uzay ve $f : X \rightarrow Y$ sürekli birebir ve örten bir fonksiyon ise, f fonksiyonunun tersi $g : Y \rightarrow X$ de süreklidir. Bu durumda f bir homeomorfizm olur.*

İspat. $f : X \rightarrow Y$ sürekli birebir ve örten bir fonksiyon olsun. f birebir ve örten olduğundan fonksiyonunun tersi $g : Y \rightarrow X$ vardır.

$U \subset X$ kapalı bir küme olsun. X kompakt olduğundan, U da kompakttır. g fonksiyon tanımı gereği $g^{-1}(U) = f(U)$ olur. f sürekli olduğundan, kompakt bir kümenin görüntüsü kompakttır. Bu nedenle $f(U)$ kompakt olur. Y Hausdorff olduğundan, Y uzayındaki her kompakt küme kapalı olur. Dolayısıyla $f(U)$ kapalıdır. Bu, $g^{-1}(U)$ 'nin kapalı olduğunu gösterir. g fonksiyonunun ön görüntüsü her kapalı küme için kapalı olduğundan, g süreklidir.

Sonuç olarak, f bir homeomorfizm olur. $\square$

2.2 Ayırık Birleşim Uzayı

Tanım 2.2.1 X ve Y iki küme olsun. X ve Y 'nin ayırık birleşimi, $X \sqcup Y$ veya $X \amalg Y$ ile gösterilir ve

$$X \sqcup Y = (X \times \{0\}) \cup (Y \times \{1\})$$

ile tanımlanır. Burada $X \times \{0\} = \{(x, 0) : x \in X\}$ ve $Y \times \{1\} = \{(y, 1) : y \in Y\}$ 'dir.

Not.

- Ayırık birleşim, X ve Y kümelerinin elemanlarını bir araya getirirken, her elemanın hangi kümeden geldiğini de belirtir.
- X ve Y kesişiyor olsa bile, ayırık birleşimde her eleman farklı bir etiketle (0 veya 1) işaretlenir, böylece elemanlar ayırt edilebilir.
- X ve Y topolojik uzayları kullanılarak $X \sqcup Y$ üzerine bir topoloji tanımlanabilir. Bu topolojiye ayırık birleşim topolojisi denir.

□

Tanım 2.2.2 X ve Y topolojik uzaylar ise, $X \sqcup Y$ üzerindeki ayırık birleşim topolojisi

$$U \subset X \sqcup Y \text{ açıktır} \iff U \cap (X \times \{0\}) \text{ ve } U \cap (Y \times \{1\}) \text{ açıktır}$$

ile tanımlanır.

Örnek 2.2.3 $S^0 = \{-1, +1\}$ uzayn $\{-1\}$ ve $\{+1\}$ noktalarının

$$S^0 = \{-1\} \sqcup \{+1\}.$$

ayırık birleşimidir.

Önerme 2.2.4 X , Y , ve Z topolojik uzayları için $X \sqcup Y \rightarrow Z$ sürekli fonksiyonu $X \rightarrow Z$ ve $Y \rightarrow Z$ sürekli fonksiyonlarının bir çiftine karşılık gelir. Eğer Q bağlantılı bir topolojik uzay ise, $Q \rightarrow X \sqcup Y$ sürekli fonksiyonu ya $Q \rightarrow X$ ya da $Q \rightarrow Y$ sürekli bir fonksiyonuna karşılık gelir.

İspat.

$g : X \sqcup Y \rightarrow Z$ sürekli fonksiyonu X ve Y üzerindeki

$$g_X : X \rightarrow Z, \quad g_X(x) = g(x)$$

$$g_Y : Y \rightarrow Z, \quad g_Y(y) = g(y)$$

sürekli fonksiyonlara ayırabiliriz. g sürekli ve X ile Y ayırık birleşim topolojisine sahip olduğundan bu fonksiyonlar süreklidir.

Tersine, $g_X : X \rightarrow Z$ ve $g_Y : Y \rightarrow Z$ sürekli fonksiyonları verildiğinde, $g : X \sqcup Y \rightarrow Z$ fonksiyonu

$$g(x) = \begin{cases} g_X(x), & \text{eğer } x \in X, \\ g_Y(x), & \text{eğer } x \in Y. \end{cases}$$

ile tanımlanabilir. X ve Y ayrık birleşim topolojisine sahip olduğundan bu fonksiyon sürekli dir.

$f : Q \rightarrow X \sqcup Y$ sürekli bir fonksiyon ise, $f^{-1}(X)$ ve $f^{-1}(Y)$ açık kümeler ve

$$f^{-1}(X \sqcup Y) = Q, \quad f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y) = \emptyset$$

olur. Q bağlantılı olduğundan $f^{-1}(X) = \emptyset$ ya da $f^{-1}(Y) = \emptyset$ olmalıdır.

- Eğer $f^{-1}(X) = \emptyset$ ise $f, Q \rightarrow Y$ sürekli bir fonksiyon olarak düşünülebilir.
- Eğer $f^{-1}(Y) = \emptyset$ ise $f, Q \rightarrow X$ sürekli bir fonksiyon olarak düşünülebilir.

□

Örnek 2.2.5 $f : S^0 \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu, $\{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $\{+1\} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlarının bir çiftine karşılık gelir. Tek noktalı bir uzaydan $\mathbb{R}$ uzayına sürekli bir fonksiyon bir noktayı $\mathbb{R}$ uzayında bir noktaya eşler. Buradan $a, b \in \mathbb{R}$ için

$$f(-1) = a \quad \text{ve} \quad f(+1) = b$$

olur. $S^0 \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu, $\mathbb{R}^2$ uzayındaki sıralı çiftlere $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ karşılık gelir.

Örnek 2.2.6 $\mathbb{R} - \{0\}$ uzayı $\mathbb{R}$ uzayının kendisi ile ayrık birleşimi ile homeomorf

$$\mathbb{R} - \{0\} \cong \mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}$$

olur. $f : \mathbb{R} \sqcup \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$ homeomorfizmini

- İlk $\mathbb{R}$ kopyası için $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, örneğin $f_1(x) = e^x$.
- İkinci $\mathbb{R}$ kopyası için $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, 0)$, örneğin $f_2(x) = -e^x$.

ile tanımlayalım. f fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{eğer } x \in \text{ilk } \mathbb{R}, \\ f_2(x), & \text{eğer } x \in \text{ikinci } \mathbb{R}. \end{cases}$$

olur.

f_1 ve f_2 birebir ve örten olduğundan, f de birebir ve örten bir fonksiyon olur. Ayrıca f_1 ve f_2 sürekli olduğundan, f fonksiyonunda sürekli olur.

f fonksiyonunun tersi $g : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}$

$$g_1(y) = \ln(y), \quad g_2(y) = \ln(-y).$$

olmak üzere

$$g(y) = \begin{cases} g_1(y), & \text{eğer } y > 0, \\ g_2(y), & \text{eğer } y < 0, \end{cases}$$

ile tanımlanır. g_1 ve g_2 sürekli olduğundan, g de sürekli.

f ve g sürekli, birebir ve örten fonksiyonlardır. Ayrıca, f ve g birbirinin tersidir. Bu nedenle $\mathbb{R} - \{0\}$ ve $\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}$ homeomorf olur.

Teorem 2.2.7 X ve Y uzaylarının ayrık birleşimleri $X \sqcup Y$ kompakt olması için gerek ve yeter şart X ve Y uzaylarının kompakt olmasıdır.

İspat.

$\Rightarrow$ $X \sqcup Y$ kompakt olsun. X için bir açık örtü $\mathcal{O}_X$ alalım. Bu açık örtüyü $X \sqcup Y$ için bir açık örtüye genişletmek için Y uzayında

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_X \cup \{Y\}$$

bir açık küme olarak ekleyelim. $X \sqcup Y$ kompakt olduğundan, $\mathcal{O}$ ailesinin sonlu bir

$$\mathcal{O}' = \{U_1, U_2, \dots, U_m, Y\}$$

alt örtüsü vardır. Bu sonlu alt örtüden Y uzayını çıkarırsak, $\mathcal{O}_X$ ailesinin sonlu bir

$$\mathcal{O}'_X = \{U_1, U_2, \dots, U_m\}$$

alt örtüsünü elde ederiz. Bu, X uzayının kompakt olduğunu gösterir. Benzer şekilde Y uzayının kompakt olduğu gösterilir.

$\Leftarrow$ $X \sqcup Y$ uzayının açık bir örtüsü $\mathcal{O}$ olsun. Ayrık birleşim topolojisinin tanımına göre, $\mathcal{O}$ ailesindeki her açık küme, X uzayının bir açık alt kümesi ve Y uzayının bir açık alt kümesinin birleşimidir. Buradan $\mathcal{O}$ ailesi X ve Y için birer

$$\mathcal{O}_X = \{U \cap X : U \in \mathcal{O}\}, \quad \mathcal{O}_Y = \{U \cap Y : U \in \mathcal{O}\}$$

açık örtü içerir. X ve Y kompakt olduğundan, $\mathcal{O}_X$ ve $\mathcal{O}_Y$ ailelerinin sonlu

$$\mathcal{O}'_X = \{U_1, U_2, \dots, U_m\}, \quad \mathcal{O}'_Y = \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$$

alt örtüleri vardır. Bu sonlu alt örtüleri birleştirerek $\mathcal{O}$ ailesinin sonlu bir

$$\mathcal{O}' = \{U_1, U_2, \dots, U_m, V_1, V_2, \dots, V_n\}$$

alt örtüsünü elde ederiz. Dolayısıyla, $X \sqcup Y$ kompakt olur.

□

Teorem 2.2.8 X ve Y uzaylarının ayrık birleşimleri $X \sqcup Y$ hausdorff olması için gerek ve yeter şart X ve Y uzaylarının hausdorff olmasıdır.

İspat.

$\Rightarrow X \sqcup Y$ Hausdorff olsun. $x_1, x_2 \in X$ ve $x_1 \neq x_2$ olsun. $X \sqcup Y$ Hausdorff olduğundan, x_1 ve x_2 noktalarını ayıran ayrik açık kümeler $U_1, U_2 \subset X \sqcup Y$ vardır. Buradan $U_1 \cap X$ ve $U_2 \cap X$ kümeleri X uzayında ayrik açık kümeler olur. Bu, X uzayının Hausdorff olduğunu gösterir. Benzer şekilde Y uzayının Hausdorff olduğunu gösterilir.

$\Leftarrow X$ ve Y Hausdorff iki uzay olsun. $X \sqcup Y$ uzayının Hausdorff olduğunu göstermek için, $X \sqcup Y$ uzayındaki herhangi iki farklı noktayı ayıran ayrik açık kümeler bulmamız gerekir. Bu durumları dört farklı şekilde inceleyebiliriz.

1. Durum: (x_1, a) ve (x_2, a) için $(x_1, x_2 \in X)$:

$x_1, x_2 \in X$ ve $x_1 \neq x_2$ ise, X Hausdorff olduğundan, x_1 ve x_2 noktalarını ayıran ayrik açık kümeler $U_1, U_2 \subset X$ vardır. Bu kümeler aynı zamanda $X \sqcup Y$ uzayında da ayrik açık kümelerdir.

$$U_1 \cap U_2 = \emptyset, \quad x_1 \in U_1, \quad x_2 \in U_2$$

2. Durum: (y_1, b) ve (y_2, b) için $(y_1, y_2 \in Y)$:

$y_1, y_2 \in Y$ ve $y_1 \neq y_2$ ise, Y Hausdorff olduğundan, y_1 ve y_2 noktalarını ayıran ayrik açık kümeler $V_1, V_2 \subset Y$ vardır. Bu kümeler aynı zamanda $X \sqcup Y$ uzayında da ayrik açık kümelerdir.

$$V_1 \cap V_2 = \emptyset, \quad y_1 \in V_1, \quad y_2 \in V_2$$

3. Durum: (x, a) ve (y, b) için $(x, y \in X \cap Y)$:

$x, y \in X \cap Y$ ve $x \neq y$ ise, hem X hem de Y Hausdorff olduğundan, x ve y noktalarını ayıran ayrik açık kümeler $U_x \subset X$ ve $V_y \subset Y$ vardır. Bu kümeler aynı zamanda $X \sqcup Y$ uzayında ayrik açık kümelerdir.

$$U_x \cap V_y = \emptyset, \quad x \in U_x, \quad y \in V_y$$

4. Durum: (x, a) ve (y, b) için $(x, y \notin X \cap Y)$:

$x \in X$ ve $y \in Y$ ise, X ve Y ayrik birleşim topolojisine sahip olduğundan, X ve Y birbirinden tamamen ayrıdır. Bu durumda, x noktasını içeren U_x ve y noktasını içeren V_y kümeleri $X \sqcup Y$ ayrik açık kümelerdir:

$$U_x \cap V_y = \emptyset, \quad x \in U_x, \quad y \in V_y$$

Her durumda, $X \sqcup Y$ uzayındaki herhangi iki farklı noktayı ayıran ayrik açık kümeler bulunabilir. Buradan $X \sqcup Y$ Hausdorff olur. $\square$

Lemma 2.2.9 X ve Y boş olmayan topolojik uzaylar olmak üzere ayrik birleşimleri $X \sqcup Y$ bağlantılı değildir.

İspat. X ve Y boş olmayan uzaylar olsun. $U = X \times \{0\}$, $V = Y \times \{1\}$ alalım. U kümesi $X \sqcup Y$ uzayının topolojisinde X uzayının açık kümesidir. V kümesi $X \sqcup Y$ uzayının topolojisinde Y uzayının açık kümesidir.

$X \times \{0\}$ ve $Y \times \{1\}$ olduğundan

$$U \cap V = \emptyset$$

ve $X \sqcup Y = (X \times \{0\}) \cup (Y \times \{1\})$ olduğundan

$$U \cup V = X \sqcup Y$$

elde edilir. X ve Y boş olmayan kümeler olduğundan $U \neq \emptyset$ ve $V \neq \emptyset$ olur.

U ve V kümeleri $X \sqcup Y$ uzayının boş olmayan ayrık açık alt kümeleridir ve birleşimleri $X \sqcup Y$ uzayına eşittir. Bu ise $X \sqcup Y$ uzayının bağlantılı olmadığını gösterir. $\square$

2.3 Çarpım Uzayları

Tanım 2.3.1 (Çarpım Uzayı) X ve Y topolojik uzaylar olsun. $X \times Y$ kartezyen çarpımı

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$$

ile tanımlanır. $X \times Y$ üzerindeki **çarpım topolojisi**, X ve Y uzayları üzerinde tanımlı olan topolojilerinden türetilir. $X \times Y$ uzayında bir açık küme X uzayının açık bir alt kümesi ile Y uzayının açık bir alt kümesinin kartezyen çarpımlarıdır.

Not. $X \times Y$ uzayındaki bir kümenin çarpım topolojisinde açık bir küme olması için, her bir $(x, y) \in X \times Y$ noktası için U kümesi X uzayında bir açık, V kümesi Y uzayında bir açık olmak üzere $(x, y) \in U \times V$ olmasıdır.

$X \times Y$ uzayında $U \times V$ kümesinin açık küme olması için gerek ve yeter şart $\pi_1(U \times V)$ kümesinin X uzayında bir açık $\pi_2(U \times V)$ kümesinin Y uzayında bir açık küme olmasıdır. $\square$

Örnek 2.3.2 $\mathbb{R}^2$ üzerindeki topolojinin bir tabanı, $\mathbb{R}$ uzayındaki açık kümelerin kartezyen çarpımları olan kümelerden oluşur.

$A \subset \mathbb{R}$ ve $B \subset \mathbb{R}$ açık kümeler olmak üzere $A \times B \subset \mathbb{R}^2$ bir açık dikdörtgendir. Örneğin:

$$A = (a, b), \quad B = (c, d) \implies A \times B = (a, b) \times (c, d)$$

$\mathbb{R}^2$ uzayında bir açık dikdörtgeni ifade eder.

$\mathbb{R}^2$ uzayında bir açık disk bir merkez noktası ve bir yarıçap

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r\}$$

ile tanımlanır. Burada (x_0, y_0) disk merkezidir ve $r > 0$ yarıçaptır. Bu açık disk, $\mathbb{R}^2$ uzayındaki açık dikdörtgenlerin bir birleşimi olarak ifade edebiliriz. Diskin çevresi üzerinde köşeleri bulunan tüm açık dikdörtgenlerin birleşimini alarak disk

$$D = \bigcup_{(a,b) \times (c,d) \subset D} (a, b) \times (c, d)$$

oluşur. Burada $(a, b) \times (c, d)$, diskin içinde kalan açık dikdörtgenlerdir.

Sonuç olarak $\mathbb{R}^2$ uzayındaki her açık disk, $\mathbb{R}$ uzayındaki açık kümelerin kartezyen çarpımlarının bir birleşimi olarak ifade edilebilir. Daha genel olarak, $\mathbb{R}^2$ uzayındaki her açık küme $A_i, B_i \subset \mathbb{R}$ açık kümeler olmak üzere

$$\bigcup_{i \in I} (A_i \times B_i),$$

ile tanımlanabilir.

Örnek 2.3.3 $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{R}^{m+n}$ uzayları

$$f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$$

dönüşümü

$$f((x_1, \dots, x_m), (y_1, \dots, y_n)) = (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$$

ile homeomorftur.

Örnek 2.3.4 Bir $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$ silindiri $S^1 \times [0, 1]$

$$h : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$h((x, y), z) = (x, y, z).$$

dönüşümü ile homeomorftur.

Teorem 2.3.5 $f : Z \rightarrow X \times Y$ sürekli fonksiyonu $f_1 : Z \rightarrow X$ ve $f_2 : Z \rightarrow Y$ sürekli fonksiyonların çiftine birebir karşılık gelir.

İspat.

$f : Z \rightarrow X \times Y$ fonksiyonu verilsin f_1 ve f_2 fonksiyonlarını

$$f_1 = \pi_1 \circ f, \quad f_2 = \pi_2 \circ f,$$

ile tanımlayalım. Burada $\pi_1 : X \times Y \rightarrow X$ ve $\pi_2 : X \times Y \rightarrow Y$

$$\pi_1(x, y) = x, \quad \pi_2(x, y) = y$$

projeksiyon fonksiyonlarıdır. π_1 ve π_2 sürekli fonksiyonlardır.

$$f_1 = \pi_1 \circ f, \quad f_2 = \pi_2 \circ f$$

olduğundan, f_1 ve f_2 sürekli fonksiyonlardır.

$f_1 : Z \rightarrow X$ ve $f_2 : Z \rightarrow Y$ sürekli fonksiyonları için f

$$f(z) = (f_1(z), f_2(z)).$$

ile tanımlanır. $U \subset X$ ve $V \subset Y$ açık kümeler olsun. f_1 ve f_2 sürekli olduğundan, $f_1^{-1}(U)$ ve $f_2^{-1}(V)$ açık kümeleri için

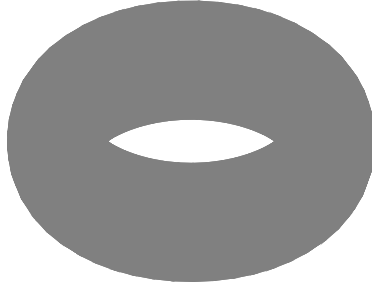
$$f^{-1}(U \times V) = f_1^{-1}(U) \cap f_2^{-1}(V).$$

olduğundan $f^{-1}(U \times V)$ de açık bir kümedir ($f_1^{-1}(U) \cap f_2^{-1}(V)$ açık küme). Ayrıca

$$f_1 = \pi_1 \circ f, \quad f_2 = \pi_2 \circ f \implies f(z) = (f_1(z), f_2(z)).$$

olduğundan $f \leftrightarrow (f_1, f_2)$ birebir bir eşleşmedir. $\square$

Örnek 2.3.6 (Torus ve $S^1 \times S^1$ Homeomorfizmi) *Torus T^2 ve $S^1 \times S^1$ çarpım uzayı homeomorftur.*



$$f : S^1 \times S^1 \rightarrow T^2$$

fonksiyonu

$$f((x, y), (x', y')) = ((x' + 2)x, (x' + 2)y, y').$$

ve

$$g : T^2 \rightarrow S^1 \times S^1$$

fonksiyonu

$$g(x, y, z) = \left(\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right), (\sqrt{x^2 + y^2} - 2, z) \right).$$

ile tanımlayalım. f ve g süreklidir. T^2 kompakt ve $S^1 \times S^1$ Hausdorff olduğundan, birebir ve örten sürekli bir fonksiyonun tersi de süreklidir.

Sonuç olarak T^2 ve $S^1 \times S^1$ homeomorftur. Bu homeomorfizm, torusun bir çember boyunca başka bir çemberin dönmesiyle elde edildiğini geometrik olarak gösterir.

Teorem 2.3.7 $X \times Y$ çarpım uzayının Hausdorff olması için gerek ve yeter şart X ve Y uzaylarının Hausdorff olmasıdır.

İspat. $\Rightarrow X \times Y$ uzayının Hausdorff olduğunu varsayalım. X uzayının Hausdorff olduğunu göstermek istiyoruz. $x_1, x_2 \in X$ olmak üzere, $x_1 \neq x_2$ iki farklı nokta alalım ve $y \in Y$ herhangi bir nokta olsun. Bu durumda $(x_1, y) \neq (x_2, y)$ olur. $X \times Y$ Hausdorff olduğu için, (x_1, y) ve (x_2, y) noktalarını içeren ayrık açık kümeler $A_1, A_2 \subset X \times Y$ vardır; öyle ki $(x_1, y) \in A_1$ ve $(x_2, y) \in A_2$ olur.

A_1 çarpım topolojisinde açık olduğundan, A_1 kümesi $U \times V$ biçimindeki alt kümelerin birleşimi şeklinde yazılabilir. Burada U , X uzayının açık bir alt kümesi ve V , Y uzayının açık bir alt kümesidir. Özellikle $(x_1, y) \in A_1$ olduğundan $x_1 \in U$ ve $y \in V$ olur. Benzer şekilde, $(x_2, y) \in A_2$ olduğundan $x_2 \in U'$ ve $y \in V'$ olur.

Şimdi, $U \cap U' \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $U \cap U'$ içinde bir $x \in X$ elemanı vardır. Bu eleman için $(x, y) \in U \times V$ olur. Ayrıca $y \in V$ ve $(x, y) \in U' \times V'$ olur çünkü $y \in V'$. Bu durumda $U \times V$ ve $U' \times V'$ kümeleri kesişir. Ancak bu, A_1 ve A_2 kümelerinin ayrık olması varsayımına aykırıdır. Dolayısıyla $U \cap U' = \emptyset$ olmalıdır.

Benzer şekilde, Y uzayının da Hausdorff olduğu gösterilebilir.

$\Leftarrow X$ ve Y uzaylarının Hausdorff olduğunu varsayalım. $X \times Y$ uzayının Hausdorff olduğunu göstermek için, $X \times Y$ uzayında herhangi iki farklı nokta alalım: (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) . Burada iki durum söz konusudur.

Durum 1: Eğer $x_1 \neq x_2$ ise,
 X Hausdorff olduğundan, öyle $U_1, U_2 \subset X$ açık kümeleri vardır ki

$$x_1 \in U_1, x_2 \in U_2 \quad \Rightarrow \quad U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

olur. Bu durumda $U_1 \times Y$ ve $U_2 \times Y$ kümeleri $X \times Y$ uzayında açıktır ve $(x_1, y_1) \in U_1 \times Y$, $(x_2, y_2) \in U_2 \times Y$ olur. $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ olduğundan

$$(U_1 \times Y) \cap (U_2 \times Y) = \emptyset$$

elde edilir.

Durum 2: Eğer $x_1 = x_2$ ise, zorunlu olarak $y_1 \neq y_2$ olmalıdır. Y Hausdorff olduğundan, öyle $V_1, V_2 \subset Y$ açık kümeleri vardır ki, $y_1 \in V_1$, $y_2 \in V_2$ ve $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ olur.

$X \times V_1$ ve $X \times V_2$ kümeleri $X \times Y$ 'de açıktır ve $(x_1, y_1) \in X \times V_1$, $(x_2, y_2) \in X \times V_2$ olur. $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ olduğundan

$$(X \times V_1) \cap (X \times V_2) = \emptyset$$

elde edilir.

Her iki durumda da, $X \times Y$ uzayındaki herhangi iki farklı nokta için ayrık açık kümeler bulunabilir. Dolayısıyla $X \times Y$ Hausdorff olur. $\square$

Teorem 2.3.8 $X \times Y$ çarpım uzayı bağlantılıdır ancak ve ancak X ve Y uzayları bağlantılıdır.

İspat. $\Rightarrow X \times Y$ uzayı bağlantılı olsun. Kabul edelim ki X bağlantılı olmasın. Bu durumda, $X = U_1 \cup U_2$ olacak şekilde U_1 ve U_2 ayrık, açık ve boş olmayan kümeler, vardır.

$X \times Y$ uzayını

$$X \times Y = (U_1 \times Y) \cup (U_2 \times Y).$$

olarak yazabiliriz. Buradan

$$(U_1 \times Y) \cap (U_2 \times Y) = (U_1 \cap U_2) \times Y = \emptyset \times Y = \emptyset.$$

olur. $U_1 \neq \emptyset$, $U_2 \neq \emptyset$ olduğundan

$$U_1 \times Y \neq \emptyset, U_2 \times Y \neq \emptyset$$

ve $X \times Y$ bağlantılı olduğundan Y boş küme olamayacağından

$$U_2 \times Y \neq \emptyset$$

elde edilir. Bu durumda, $X \times Y$ ayrık iki açık kümenin birleşimi olarak yazılmış olur.

$$X \times Y = (U_1 \times Y) \cup (U_2 \times Y)$$

Bu ise $X \times Y$ uzayının bağlantılı olduğu varsayımına aykırıdır. Dolayısıyla, X bağlantılıdır.

Benzer şekilde, Y uzayının bağlantılı olduğunu gösterilir.

$\Leftarrow$ X ve Y uzaylarının bağlantılı olduğunu varsayalım. $X \times Y$ uzayının bağlantılı olduğunu göstermek için, $X \times Y$ uzayından $S_0 = \{-1, 1\}$ ayrık uzayına sürekli bir f fonksiyonu alalım ve bunun sabit olduğunu gösterelim.

$x_0 \in X$ herhangi bir nokta olsun. Bu durumda alt uzay $\{x_0\} \times Y \subset X \times Y$, Y ile homeomorftur ve dolayısıyla bağlantılıdır. Buradan f fonksiyonunun $\{x_0\} \times Y$ üzerindeki kısıtlaması sabit olmalıdır.

Varsayalım ki her $y \in Y$ için $f(x_0, y) = 1$ olsun. Her $y \in Y$ için, f fonksiyonunu $X \times \{y\}$ alt kümesine kısıtlayalım. Bu alt kümelerin her biri, $X \times Y$ uzayının alt uzayı olarak X ile homeomorftur ve dolayısıyla bağlantılıdır. Buradan f bu şekildeki her alt küme üzerinde sabittir.

Fakat $(x_0, y) \in X \times \{y\}$ ve $f(x_0, y) = 1$ olduğundan, her $(x, y) \in X \times \{y\}$ için $f(x, y) = 1$ olmalıdır.

Aynı argüman tüm $y \in Y$ için geçerlidir; dolayısıyla her $(x, y) \in X \times Y$ için $f(x, y) = 1$ olur.

Başka bir deyişle, f fonksiyonu $X \times Y$ üzerinde sabittir. Bu da $X \times Y$ uzayından S_0 uzayına sürekli ve örten olamayacağını gösterir.

Dolayısıyla $X \times Y$ bağlantılı olur. $\square$

Teorem 2.3.9 (Tychonov Teoremi) $X \times Y$ çarpım uzayı kompakttır ancak ve ancak X ve Y kompakt uzaylardır.

İspat.

$\Rightarrow$ $X \times Y$ kompakt olsun. X uzayının bir açık örtüsü

$$\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$$

olsun. $y_0 \in Y$ sabit bir nokta seçelim. Her U_α için $W_\alpha = U_\alpha \times Y$ kümesini tanımlayalım. $\{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$ kümesi, U_α ve Y açık olduğundan çarpım topolojisinde açıktır ve $\mathcal{U}$ bir örtü olduğundan her $(x, y) \in X \times Y$ için, $x \in U_\alpha$ olacak şekilde bir α vardır. Buradan

$$(x, y) \in U_\alpha \times Y = W_\alpha$$

olur. $X \times Y$ kompakt olduğundan, $\{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$ örtüsünün sonlu bir alt örtüsü vardır. $A_0 \subset A$ için bu alt örtü

$$X \times Y = \bigcup_{\alpha \in A_0} W_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A_0} (U_\alpha \times Y)$$

olsun. $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A_0}$ kümesinin X uzayının bir örtüsü olduğunu gösterelim. Herhangi bir $x \in X$ için, $(x, y_0) \in X \times Y$ noktasını ele alalım. Bu nokta, $\bigcup_{\alpha \in A_0} (U_\alpha \times Y)$ içinde olmalıdır. Dolayısıyla öyle bir $\alpha \in A_0$ vardır ki $(x, y_0) \in U_\alpha \times Y$ olur. Bu da $x \in U_\alpha$ olduğunu gösterir. Böylece

$$X = \bigcup_{\alpha \in A_0} U_\alpha$$

olması $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A_0}$ kümesinin X uzayının sonlu bir alt örtüsü olduğunu gösterir. Dolayısıyla X kompakt olur.

Y uzayının kompaktlığı benzer şekilde gösterilir.

Sonuç olarak, $X \times Y$ kompakt ise hem X hem de Y kompakt olur.

$\Leftarrow$ X ve Y uzaylarının kompakt olduğunu varsayalım. $X \times Y$ uzayının bir açık örtüsü $\mathcal{O} = \{O_i\}_{i \in I}$ olsun. O_i çarpım topolojisinde açık olduğundan, her $(x, y) \in X \times Y$ için öyle $S_{x,y} \times T_{x,y}$ vardır ki $S_{x,y}$, X uzayının açık kümesi $T_{x,y}$, Y açık kümesi olmak üzere

$$(x, y) \in S_{x,y} \times T_{x,y} \subset O_i$$

olur. $X \times Y$ uzayındaki tüm (x, y) noktalarını alarak, $\{S_{x,y} \times T_{x,y}\}_{(x,y) \in X \times Y}$ kümeleri $X \times Y$ için bir açık örtü oluşturur.

Her $x \in X$ için, $\{x\} \times Y$ alt kümesi, $\{S_i \times T_i\}_{i \in I}$ açık örtüsü ile kesişimi alınarak bir açık örtüye sahiptir. $\{x\} \times Y$, Y ile homeomorf olduğundan kompakttır, dolayısıyla sonlu bir $S_{i_1} \times T_{i_1}, \dots, S_{i_n} \times T_{i_n}$ alt örtüsü vardır ve $\{x\} \times Y$ ile kesişimi bu alt uzayın bir örtüsünü verir.

$S_x = S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \dots \cap S_{i_n}$ olsun. Bu, X uzayının sonlu sayıda açık kümesinin kesişimidir, dolayısıyla yine X uzayının açık kümesidir ve x noktasını içerir. Bu işlemi her $x \in X$ için yaparak, X uzayının $\{S_x\}_{x \in X}$ açık örtüsünü elde ederiz.

X kompakt olduğundan, bu örtü sonlu bir alt örtüye sahiptir, yani sonlu sayıda $x_1, \dots, x_m \in X$ noktaları vardır ki $S_{x_1}, \dots, S_{x_m}$ kümeleri X uzayını örter. Bu noktaların her biri için, yukarıdaki süreç $X \times Y$ uzayının örtüsünün sonlu bir inceltmesini verir ki bu $S_{x_i} \times Y$ kümesini örter.

Eğer bu sonlu inceltmelerin tümünü, (sonlu sayıdaki) $x_1, \dots, x_m$ noktalarının her biri için alırsak, $X \times Y$ uzayını örten ve $\{S_i \times T_i\}_{i \in I}$ örtüsünün sonlu bir inceltmesi olan açık kümelerin bir koleksiyonunu elde ederiz.

Dolayısıyla $X \times Y$ kompakttır. $\square$

2.4 Bölüm Uzayları

Tanım 2.4.1 (Bölüm Uzayı) X bir topolojik uzay ve $\sim$ bu uzay üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. $X/\sim$ kümesi, X uzayındaki denklik sınıflarının kümesidir:

$$X/\sim = \{[x] : x \in X\}$$

burada $[x] = \{y \in X : y \sim x\}$ denklik sınıfıdır. $\pi : X \rightarrow X/\sim$ doğal projeksiyonu

$$\pi(x) = [x]$$

olmak üzere $X/\sim$ üzerindeki topolojinin açıkları

$$U \subset X/\sim \text{ açıktır} \iff \pi^{-1}(U) \text{ kümesi } X \text{ uzayında açıktır}$$

ile belirlenir. Bu topolojiye bölüm topolojisi denir.

Sonuç 2.4.2 Bölüm uzayının tanımından π bölüm dönüşümü süreklidir.

Örnek 2.4.3 $X = \mathbb{R}$ uzayını ele alalım ve bir denklik bağıntısı $\sim$

$$x \sim y \iff x = y \text{ veya } (x, y \in \mathbb{Z})$$

ile tanımlayalım. Bu, $\mathbb{R}$ üzerindeki tam sayıların tek bir denklik sınıfı oluşturduğu anlamına gelir. Yani, Her $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ için $[x] = \{x\}$ ve Tüm tam sayılar için $[n] = \mathbb{Z}$ olur.

Bölüm uzayı $X/\sim$

$$X/\sim = \{[x] : x \in \mathbb{R}\}.$$

tanımından $\mathbb{R}$ uzayının bir "sıkıştırılmış" halidir, çünkü tüm tam sayılar tek bir noktaya indirgenmiştir.

Önerme 2.4.4 (Evrensel Özellik) $f : X \rightarrow Y$ sürekli bir fonksiyon ve

$$x_1 \sim x_2 \implies f(x_1) = f(x_2)$$

ise

$$f = \tilde{f} \circ \pi,$$

eşitliğini sağlayan $\tilde{f} : X/\sim \rightarrow Y$ sürekli fonksiyonu tektir.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 \downarrow \pi & \searrow \tilde{f} & \\
 X/\sim & &
 \end{array}
 \quad f = \tilde{f} \circ \pi$$

İspat. $\tilde{f} : X/\sim \rightarrow Y$ fonksiyonu

$$\tilde{f}([x]) = f(x),$$

ile tanımlayalım. $x_1 \sim x_2 \implies f(x_1) = f(x_2)$ varsayımı, aynı denklik sınıfındaki tüm elemanlar için f fonksiyonunun aynı değeri verdiğini garanti edeceğinden f iyi tanımlıdır.

$V \subset Y$ açık bir küme olsun.

$$\tilde{f}^{-1}(V) = \{[x] \in X/\sim : \tilde{f}([x]) \in V\}.$$

tanıma göre $\tilde{f}([x]) = f(x)$ olduğundan

$$\tilde{f}^{-1}(V) = \{[x] \in X/\sim : f(x) \in V\}$$

olur. Bu doğal projeksiyon π kullanılarak

$$\tilde{f}^{-1}(V) = \pi(f^{-1}(V)).$$

şeklinde yazabilir. f sürekli olduğundan $f^{-1}(V)$, X uzayında açık bir kümedir. Ayrıca π tanım gereği açık kümeleri açık kümelere götürür. Buradan $\pi(f^{-1}(V))$ kümesi $X/\sim$ uzayında açık bir küme olur. Böylece $\tilde{f}$ süreklidir.

Her $x \in X$ için

$$(\tilde{f} \circ \pi)(x) = \tilde{f}(\pi(x)) = \tilde{f}([x]) = f(x)$$

olduğundan $f = \tilde{f} \circ \pi$ eşitliği elde edilir.

Dolayısıyla, $\tilde{f}$ sürekli bir fonksiyondur ve $f = \tilde{f} \circ \pi$ eşitliğini sağlar.

Kabul edelim ki $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : X/\sim \rightarrow Y$ sürekli fonksiyonlar ve $f = \tilde{f}_1 \circ \pi$, $f = \tilde{f}_2 \circ \pi$ eşitlikleri sağlansın. Bu durumda, her $[x] \in X/\sim$ için:

$$\tilde{f}_1([x]) = f(x) \quad \text{ve} \quad \tilde{f}_2([x]) = f(x)$$

olacağından

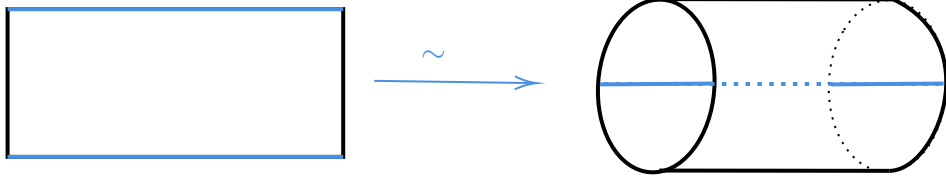
$$\tilde{f}_1([x]) = \tilde{f}_2([x]).$$

elde edilir. Yani $\tilde{f}$ tektir. □

Örnek 2.4.5 $[0, 1] \times [0, 1]$ karesinin karşılıklı iki kenarı yapıştıralım. Bunun için bir denklik bağıntısı $\sim$

$$(x, y) \sim (x', y') \iff x = x' \text{ ve } y - y' \in \mathbb{Z}.$$

ile tanımlayalım. Bu bağıntı x koordinatları aynı olan noktalar yapıştırılır, y koordinatları ya aynı olmalıdır ya da biri 0, diğeri 1 olmalıdır (örneğin $(x, 0) \sim (x, 1)$).

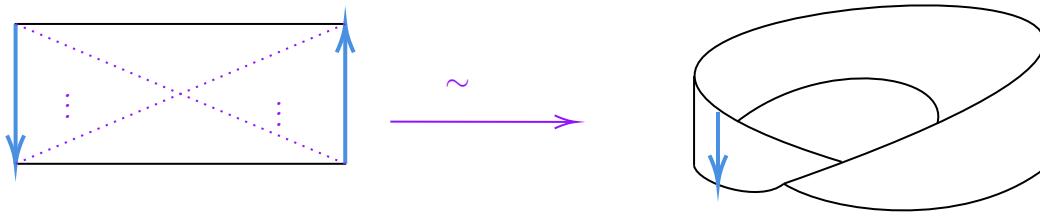


Bu yapıştırma işlemi sonucunda elde edilen uzay, bir **silindir** ile homeomorftur.

Örnek 2.4.6 (Möbius Şeridi) $[0, 1] \times [0, 1]$ karesi üzerinde kenarları ters yönde yapıştırarak bir Möbius şeridi elde edebiliriz. Bunun için bir denklik bağıntısı $\sim$

$$(x, y) \sim (x', y') \iff \begin{cases} (x, y) = (x', y') \\ x = 1 - x' \text{ ve } y - y' \in \{-1, 1\} \end{cases} \quad \text{veya}$$

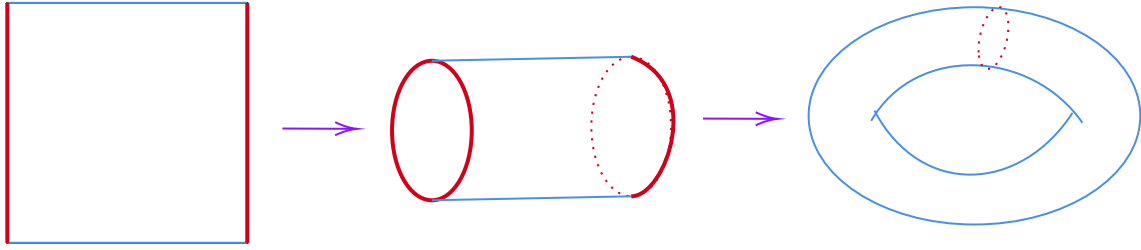
ile tanımlayalım. Bu bağıntıda x koordinatları $1 - x'$ ile terslenir, y koordinatları ya aynı kalır ya da biri 0, diğeri 1 olur (örneğin $(x, 0) \sim (1 - x, 1)$ ve $(x, 1) \sim (1 - x, 0)$).



Örnek 2.4.7 $[0, 1] \times [0, 1]$ karesi üzerinde her iki çift karşılıklı kenarı yapıştırarak bir torus elde edebiliriz. Bunun için bir denklik bağıntısı $\sim$

$$(x, y) \sim (x', y') \iff x - x' \in \mathbb{Z} \text{ ve } y - y' \in \mathbb{Z}.$$

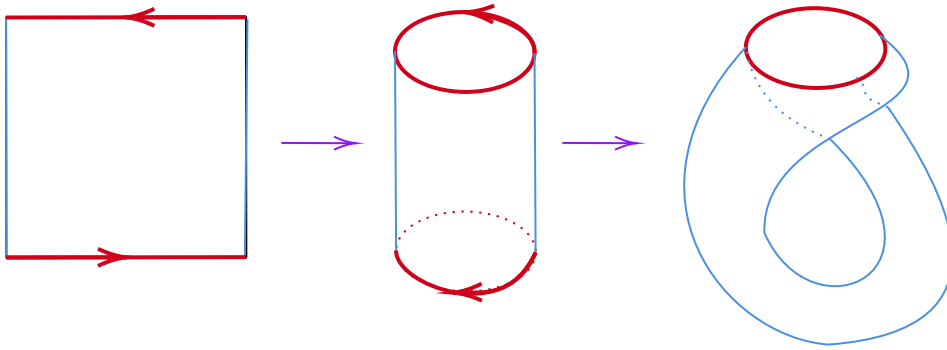
ile tanımlanır. Bu bağıntı için $(x, 0) \sim (x, 1)$ (üst ve alt kenarların yapıştırılması), $(0, y) \sim (1, y)$ (sol ve sağ kenarların yapıştırılması) olur.



Örnek 2.4.8 $[0, 1] \times [0, 1]$ karesi üzerinde her iki çift karşılıklı kenarı yapıştırarak, ancak bir çift kenarın yönünü ters çevirerek bir Klein şişesi elde edebiliriz. Bunun için bir denklik bağıntısı ~

$$(x, y) \sim (x', y') \iff \begin{cases} x - x' \in \mathbb{Z} \text{ ve } y = y', & (\text{sol ve sağ kenarların aynı yönde yapıştırılması}) \\ x = 1 - x' \text{ ve } y - y' \in \{-1, 1\}, & (\text{üst ve alt kenarların ters yönde yapıştırılması}) \end{cases}$$

ile tanımlanır. Bu bağıntı, sol ve sağ kenarlar ($x = 0$ ve $x = 1$) aynı yönde $(0, y) \sim (1, y)$ yapıştırır, üst ve alt kenarlar ($y = 0$ ve $y = 1$) ters yönde $(x, 0) \sim (1 - x, 1)$ yapıştırır.



Önerme 2.4.9 $Q = X / \sim$ bir bölüm uzayı ve X kompakt bir uzay ise, Q uzayı da kompakt olur.

İspat. Bölüm uzayı $Q = X / \sim$ tanımına göre, doğal izdüşüm fonksiyonu $\pi : X \rightarrow Q$ sürekli ve örten olduğundan Q kompakt olur. $\square$

Önerme 2.4.10 $Q = X / \sim$ bir bölüm uzayı ve X bağlantılı bir uzay ise, Q da bağlantılıdır.

İspat. Bölüm uzayı $Q = X / \sim$ tanımına göre, doğal izdüşüm fonksiyonu $\pi : X \rightarrow Q$ sürekli ve örten olduğundan Q bağlantılı olur. $\square$

Lemma 2.4.11 X bir topolojik uzay ve $f : [0, 1/2] \rightarrow S$, $g : [1/2, 1] \rightarrow S$ sürekli fonksiyonlar ise ve $f(1/2) = g(1/2)$ koşulunu sağlıyorlarsa, $h : [0, 1] \rightarrow S$ fonksiyonu

$$h(t) = \begin{cases} f(t), & \text{eğer } t \leq 1/2, \\ g(t), & \text{eğer } t \geq 1/2. \end{cases}$$

ile birleştirilebilir.

Bölüm 3

Homotopi

3.1 Homotopi

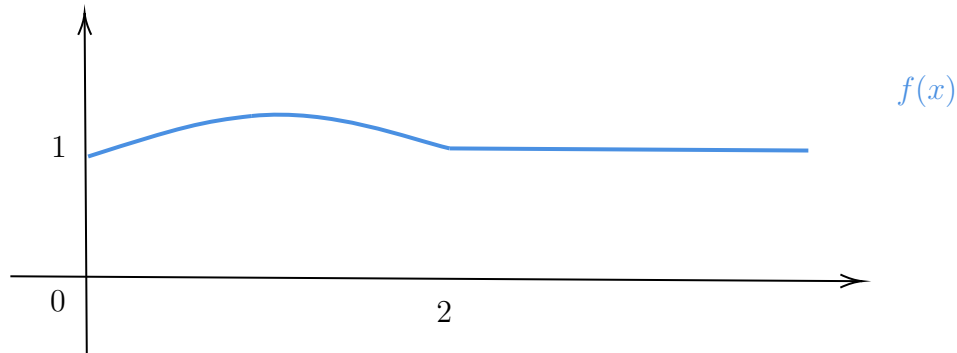
Topoloji, sürekli fonksiyonların incelenmesiyle ilgilenir ve bu nedenle topolojinin amacı, herhangi iki topolojik uzay arasındaki tüm sürekli fonksiyonları tanımlamak olmalıdır. Ancak, hemen hemen her uzay çifti için aralarında çok fazla sürekli fonksiyon bulunmaktadır. Bu fonksiyonlar o kadar fazladır ki, bunları listelemek veya tamamen anlamak neredeyse imkansızdır. Örneğin, $[0, 1]$ aralığından kendisine sürekli olan fonksiyonları listelemek bile mümkün değildir.

Ancak bu problem bazı ihmaller ile aşılabılır. Buradaki temel fikir, iki fonksiyonun birbirine denk, yani “homotop” kabul edilmesidir; eğer bir fonksiyon diğerine sürekli bir şekilde dönüştürülebiliyorsa, bu iki fonksiyon homotop olarak kabul edilir.

$f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu

$$f(x) = 1 + x^2(x - 2)^2$$

şeklinde tanımlayalım. Bu fonksiyon 1 sabit fonksiyonuna hemen hemen eşittir, ancak $x = 1$ civarında küçük bir sapma gösterir.



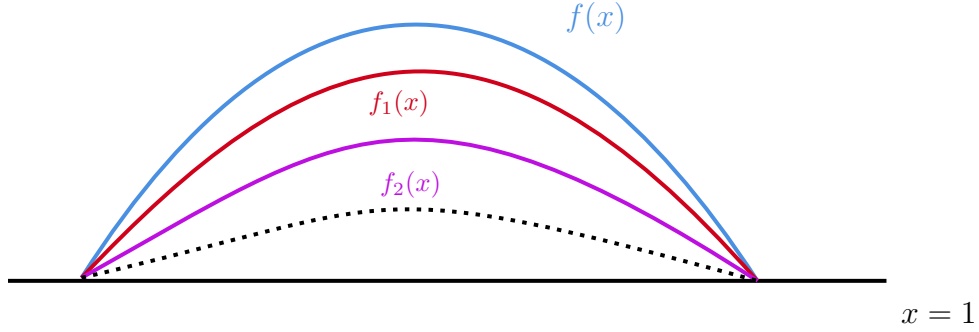
Eğer

$$f_1(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2(x - 2)^2$$

şeklinde bir fonksiyon alırsak, bu da benzer bir şekle sahiptir ancak sapma daha küçüktür. Benzer şekilde,

$$f_2(x) = 1 + \frac{1}{3}x^2(x-2)^2$$

fonksiyonu aynı şekli korur ancak sapma daha da küçülür.



Bu şekilde devam edilerek, her $n \geq 1$ için

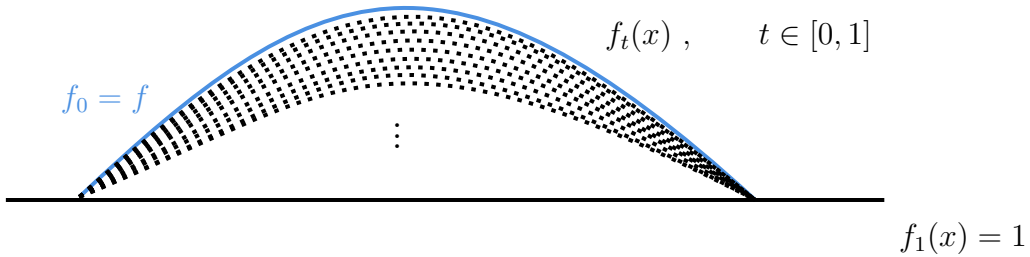
$$f_n(x) = 1 + \frac{1}{n+1}x^2(x-2)^2$$

şeklinde bir fonksiyonlar tanımlayabiliriz ve böylece f fonksiyonunu sabit fonksiyona kademeli olarak yaklaştıran bir fonksiyonlar ailesi elde ederiz.

Ancak, bu interpolasyon yapan fonksiyon ailesinin, bir fonksiyondan diğerine sürekli bir deformasyon sağlamasını istiyoruz. Bunu sağlamak için, interpolasyon fonksiyonlarını $f_1, f_2, \dots$ gibi tamsayılarla parametrize etmek yerine, onları belirli bir aralıktaki reel sayılarla indekslemeliyiz. Örneğin, aralık olarak $[0, 1]$ alalım. Bu durumda,

$$\{f_t\}_{t \in [0,1]}$$

şeklinde bir fonksiyon ailesi istiyoruz ki $f_0 = f$ ve $f_1 = 1$ sabit fonksiyon olsun.



Yukarıdaki örnekte,

$$f_t(x) = 1 + (1-t)x^2(x-2)^2, \quad t \in [0, 1]$$

olarak tanımlarsa,

$$f_0(x) = 1 + x^2(x-2)^2 = f(x)$$

ve

$$f_1(x) = 1$$

elde edilir.

Bu dönüşümler tanım kümesi $[0, 1]$, görüntü kümesi $[0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ olan sürekli dönüşümler olarak düşünebilir. Yani her $t \in [0, 1]$ için f_t sürekli dönüşüm olacak şekilde

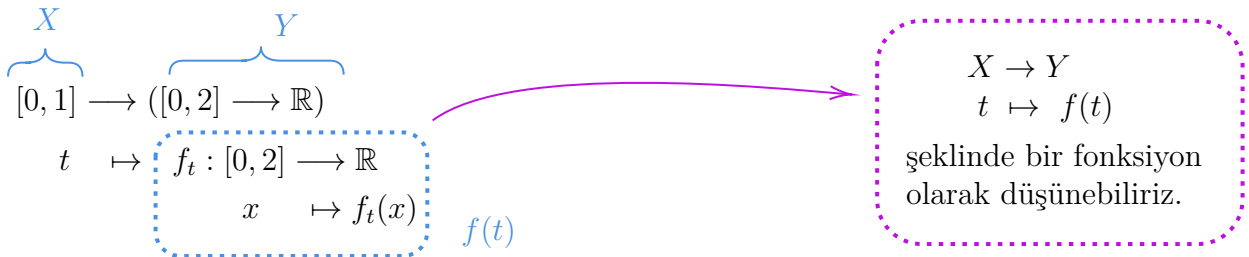
$$\begin{array}{ccc} * : [0, 1] & \longrightarrow & ([0, 2] \rightarrow \mathbb{R}) \\ t & \mapsto & f_t : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R} \end{array}$$

olur. Bu tanımladığımız dönüşümlerin sürekli olması için bu tanımlanan $*$ dönüşümü sürekli olmalıdır. Süreklilikten bahsedebilmemiz için tanım kümesi ve görüntü kümesi üzerindeki topolojiler bilinmelidir. Bu durumda $[0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli olan fonksiyonların kümesi üzerine bir topoloji tanımlı olmalıdır. Daha genel olarak herhangi X ve Y topolojik uzayları için $X \rightarrow Y$ dönüşümleri üzerine topoloji tanımlanmalıdır. Şimdi bu dönüşümlerin sürekli olduklarını gösterelim.

$\{f_t\}_{t \in [0, 1]}$ ailesi her bir $t \in [0, 1]$ noktasını

$$f_t : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonuna götürür. Buradan her $x \in [0, 2]$ noktası $f_t(x) \in \mathbb{R}$ reel sayı değerini alır.



Böylece bu fonksiyon ailesini $(x, t) \in [0, 2] \times [0, 1]$ ikilisini $f_t(x) \in \mathbb{R}$ noktasına götüren bir dönüşüm olarak düşünebiliriz. Başka bir deyişle

$$\begin{array}{ccc} \varphi : [0, 2] \times [0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, t) & \mapsto & f_t(x) \end{array}$$

şeklinde bir fonksiyon elde etmiş oluruz. $[0, 2]$ üzerinde ve $[0, 1]$ üzerinde topoloji tanımlı olduğundan (alışılmış uzayın $[0, 2]$ ve $[0, 1]$ aralıklarına indirgenmesi yani alt uzay $[0, 2]_{\mathcal{U}}$ ve $[0, 1]_{\mathcal{U}}$)

$[0, 2] \times [0, 1]$ üzerinde çarpım topolojisini tanımlayabiliriz. Bu topolojide $\mathbb{R}^2$ üzerindeki alışılmış topolojinin $[0, 2] \times [0, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$ alt kümesi indirgenen alt uzay topolojisidir. Böylece değişen fonksiyonlar ailesi iki topolojik uzay $([0, 2] \times [0, 1])_{\mathcal{U}}, (\mathbb{R}, \mathcal{U})$ arasında bir fonksiyona karşılık gelmiş olur.

Sonuç olarak f_t fonksiyonlar ailesinin sürekli olabilmesine karşılık gelen φ fonksiyonun sürekli olmasıdır.

$$\varphi \text{ sürekli} \Rightarrow (f_t)_{t \in [0,1]} \text{ sürekli}$$

Tanım 3.1.1 $f, g : X \rightarrow Y$ iki fonksiyon olmak üzere eğer sürekli bir

$$F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$$

fonksiyonu

$$F(x, 0) = f(s), \quad \forall s \in X$$

$$F(x, 1) = g(s), \quad \forall s \in X$$

eşitliklerini sağlıyorsa f ve g fonksiyonlarına homotop fonksiyonlar denir. F dönüşümüne, f ile g fonksiyonları arasındaki bir homotopi denir ve $f \simeq g$ ile gösterilir.

Örnek 3.1.2 $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(x) = 1 + x^2(x - 2)^2$$

şeklinde tanımlansın. Eğer F dönüşümü

$$\begin{aligned} F : [0, 2] \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\mapsto F(x, t) = 1 + (1 - t)x^2(x - 2)^2 \end{aligned}$$

olarak tanımlanırsa bir polinom olduğu için süreklidir. Ayrıca,

$$F(x, 0) = 1 + x^2(x - 2)^2 = f(x)$$

ve

$$F(x, 1) = 1$$

eşitlikleri sağlanır. Dolayısıyla, F dönüşümü f fonksiyonundan 1 sabit fonksiyonuna bir homotopi tanımlar.

Örnek 3.1.3 $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ içine fonksiyon

$$f(x, y) = (x, y)$$

ve $g : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ fonksiyonu

$$g(x, y) = (0, 0)$$

sabit fonksiyon olsun. Bu iki fonksiyonun homotop olduğunu göstereyim. F dönüşümü

$$\begin{aligned} F : S^1 \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ ((x, y), t) &\mapsto F((x, y), t) = (1 - t)f(x, y) \end{aligned}$$

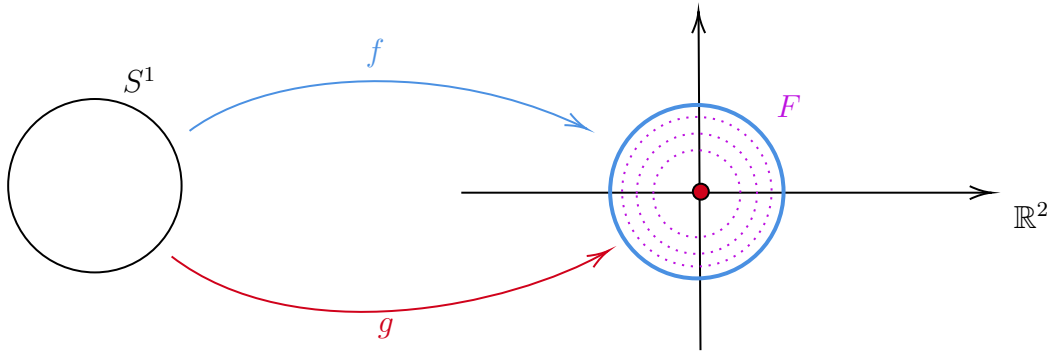
olarak tanımlayalım. F dönüşümü süreklidir ve

$$F((x, y), 0) = (1 - 0)f(x, y) = f(x, y)$$

ve

$$F((x, y), 1) = (1 - 1)f(x, y) = (0, 0) = g(x, y)$$

sağlanır. Dolayısıyla, F fonksiyonu, f ile g arasında bir homotopi tanımlar.



Tanım 3.1.4 Bir homotopi dönüşümünde sürekliliği sağlamak amacıyla kullanılan ve genellikle birim aralık olarak alınan

$$I = [0, 1]$$

ifadesine homotopi parametresi denir. Burada $t \in I$, homotopinin başlangıç ve bitiş noktaları arasında sürekli bir geçişi ifade eden parametredir.

Örnek 3.1.5 Her $x \in [0, 1]$ için

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto f(x) = x \end{aligned}$$

birim fonksiyonu ve

$$\begin{aligned} g : [0, 1] &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto g(x) = 0 \end{aligned}$$

sabit fonksiyonu verilsin. F dönüşümünü

$$\begin{aligned} F : [0, 1] \times [0, 1] &\rightarrow [0, 1] \\ (x, t) &\mapsto F(x, t) = (1 - t)x \end{aligned}$$

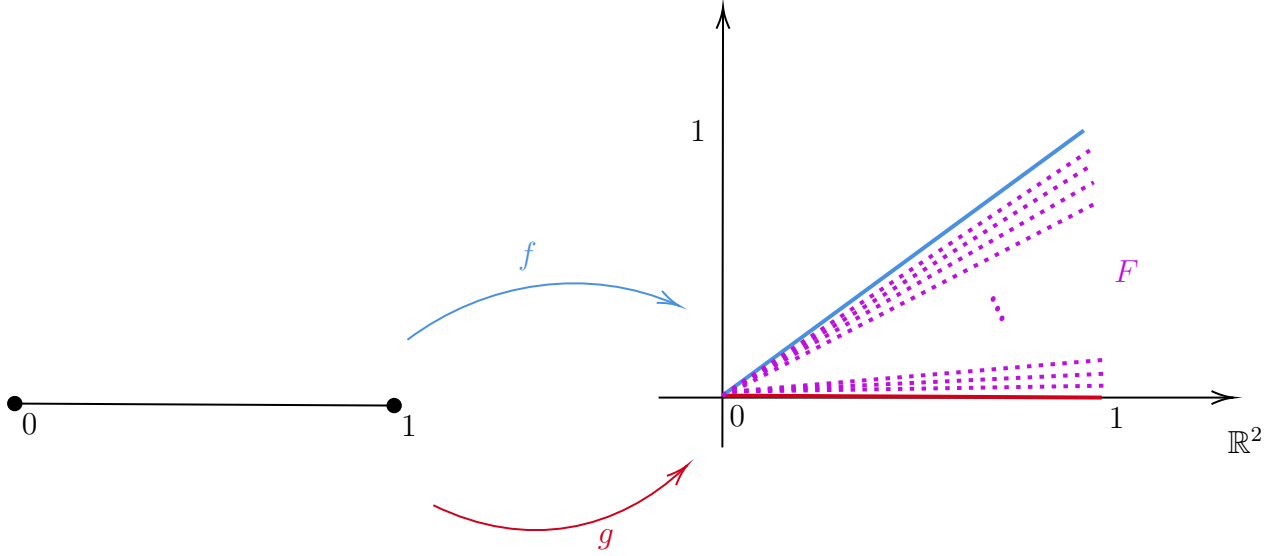
olarak tanımlayalım. F bir polinom olduğundan alışılmış uzayda süreklidir. Ayrıca

$$F(x, 0) = (1 - 0)x = x = f(x)$$

ve

$$F(x, 1) = (1 - 1)x = 0 = g(x)$$

olur. Bu ise $f(x) = x$ fonksiyonunun sürekli bir şekilde $g(x) = 0$ fonksiyonuna dönüşebileceğini gösterir. Dolayısıyla, F fonksiyonu, f ile g arasında bir homotopi tanımlar.



Örnek 3.1.6 $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ herhangi iki sürekli fonksiyon olsun. F dönüşümünü

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} \times I &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\mapsto F(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım. F sürekli fonksiyonların bileşkesi olduğundan süreklidir. Ayrıca,

$$F(x, 0) = (1 - 0)f(x) + 0 \cdot g(x) = f(x)$$

ve

$$F(x, 1) = 0 \cdot f(x) + 1 \cdot g(x) = g(x)$$

olduğundan, F dönüşümü f ile g arasında bir homotopi tanımlar.

Sonuç 3.1.7 $\mathbb{R}$ üzerindeki herhangi iki sürekli fonksiyon homotoptur.

Tanım 3.1.8 $\mathbb{R}^n$ içinde bulunan bir X alt uzayı, eğer her $x, y \in X$ ve her $t \in I$ değeri için

$$tx + (1 - t)y \in X$$

eşitliğini sağlıyorsa, **konveks** olarak adlandırılır.

Başka bir deyişle X içindeki herhangi iki nokta arasındaki doğru parçası yine X içinde bulunuyorsa X alt uzayına konvekstir denir.

Örnek 3.1.9 X konveks bir uzay olmak üzere, $f, g : \mathbb{R} \rightarrow X$ fonksiyonları ele alalım. F dönüşümünü

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} \times I &\rightarrow X \\ (x, t) &\mapsto F(x, t) = tf(x) + (1 - t)g(x) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım.

X konveks olduğu için $F(x, t) \in T$ sağlanır ve $\mathbb{R}$ üzerinde doğrusal fonksiyonlar her zaman sürekli olduğundan F süreklidir. Ayrıca,

$$F(x, 0) = g(x), \quad F(x, 1) = f(x)$$

eşitlikleri sağlanır.

Bu durumda, F dönüşümü f ile g arasında bir homotopi tanımlar. Dolayısıyla, konveks bir uzay içinde tanımlı reel değerli her iki fonksiyon homotoptur.

Örnek 3.1.10 $f, g : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ sürekli fonksiyonları verilsin. F dönüşümünü

$$F(x, t) = tf(x) + (1 - t)g(x)$$

şeklinde tanımlayalım. Burada S^1 uzayı konveks değildir. Gerçekten de, eğer $f(x)$ ve $g(x)$ birim çember S^1 üzerinde iki farklı nokta ise, genellikle

$$tf(x) + (1 - t)g(x)$$

ifadesi çember üzerinde olmayacaktır. Çünkü bu ifade iki nokta arasındaki doğru parçası üzerinde yer alır, fakat bu doğru parçası her zaman S^1 içinde kalmaz.

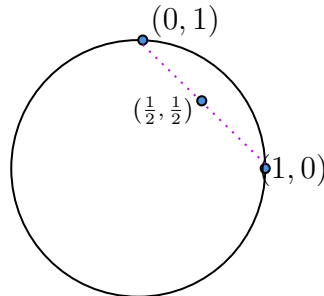
Örneğin,

$$f(x) = (1, 0), \quad g(x) = (0, 1)$$

noktalarını ele alalım. Eğer $t = \frac{1}{2}$ seçersek,

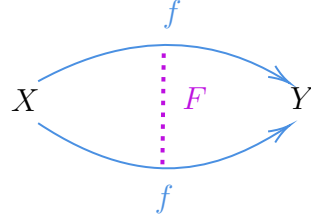
$$F(x, t) = \frac{1}{2}(1, 0) + \frac{1}{2}(0, 1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

elde edilir ki, bu nokta birim çember üzerinde değildir.



Dolayısıyla, F dönüşümünü bu şekilde tanımlama S^1 gibi konveks olmayan uzaylarda homotopi tanımlamak için kullanılamaz.

Lemma 3.1.11 $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu sürekli ise $f \simeq f$ olur.



İspat. F dönüşümünü

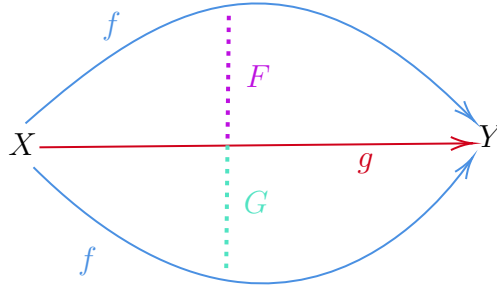
$$\begin{aligned} F : X \times I &\rightarrow Y \\ (x, t) &\mapsto F(x, t) = f(x) \end{aligned}$$

olarak tanımlayalım. F dönüşümü f fonksiyonunun tanımından sürekli olur ve

$$F(x, 0) = f(x), \quad F(x, 1) = f(x)$$

eşitlikleri sağlanır. Dolayısıyla F dönüşümü f ile kendisi arasında bir homotopi tanımlar ve $f \simeq f$ elde edilir. $\square$

Lemma 3.1.12 $f, g : X \rightarrow Y$ sürekli iki fonksiyon olsun. Eğer F dönüşümü f ile g arasında bir homotopi ise, o zaman g ile f arasında da bir homotopi vardır.



İspat. F dönüşümü f ile g arasında bir homotopi olsun. Buradan

$$F(x, 0) = f(x), \quad F(x, 1) = g(x)$$

olacak şekilde sürekli $F : X \times I \rightarrow Y$ dönüşümü vardır. G dönüşümü

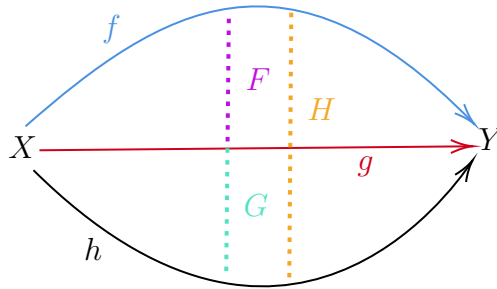
$$\begin{aligned} G : X \times I &\rightarrow Y \\ (x, t) &\mapsto G(x, t) = F(x, 1 - t) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım. G dönüşümü F dönüşümünün tanımından sürekli olur ve

$$G(x, 0) = F(x, 1) = g(x), \quad G(x, 1) = F(x, 0) = f(x)$$

eşitlikleri sağlanır. Sonuç olarak G dönüşümü g ile f arasında bir homotopi tanımlar ve $g \simeq f$ elde edilir. $\square$

Lemma 3.1.13 $f, g, h : X \rightarrow Y$ sürekli fonksiyonları için, eğer f ile g homotop ve g ile h homotop ise f ile h fonksiyonları da homotoptur.



İspat. F dönüşümü f ile g arasında bir homotopi olsun. Buradan $F : X \times I \rightarrow Y$ sürekli fonksiyonu

$$F(x, 0) = f(x), \quad F(x, 1) = g(x)$$

eşitliklerini sağlar. Benzer şekilde, G dönüşümü g ile h arasında bir homotopi olsun. $G : X \times I \rightarrow Y$ sürekli fonksiyonu

$$G(x, 0) = g(x), \quad G(x, 1) = h(x).$$

eşitliklerini sağlar. H dönüşümünü

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ G(x, 2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. F ve G dönüşümleri sürekli olduğundan H süreklidir. Ayrıca,

$$H(x, 0) = F(x, 0) = f(x)$$

ve

$$H(x, 1) = G(x, 1) = h(x)$$

eşitlikleri sağlanır. Buradan H dönüşümü f ile h arasında bir homotopi tanımlar. Böylece, $f \sim h$ olduğu gösterilmiş olur. $\square$

Sonuç 3.1.14 *Homotop olma bir denklik bağıntısıdır.*

Tanım 3.1.15 $X \rightarrow Y$ sürekli fonksiyonlarının homotopi sınıflarının kümesi $[X, Y]$ ile gösterilir.

Örnek 3.1.16 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ arasındaki tüm sürekli fonksiyonlar homotop olduğundan (Örnek 3.1.6) $[\mathbb{R}, \mathbb{R}]$ yalnızca bir elemandan oluşur.

Örnek 3.1.17 $[S^1, S^1]$ homotopi sınıfının her tam sayı için bir eleman içerdiğini gösterelim.

$f : S^1 \rightarrow S^1$ fonksiyonunu ele alalım. Her sürekli fonksiyon, temel olarak bir noktayı çember üzerinde nasıl dolaştırdığını belirler. Bu dönüş hareketi, sarma sayısı (winding number) olarak adlandırılan bir tam sayı ile ifade edilir ve

$$\deg(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} f^* d\theta$$

şeklinde tanımlanır. Bu sayı, fonksiyonun çember etrafında kaç kez dolaştığını ve hangi yönde hareket ettiğini belirtir. Örneğin: eğer f bir noktayı çember etrafında

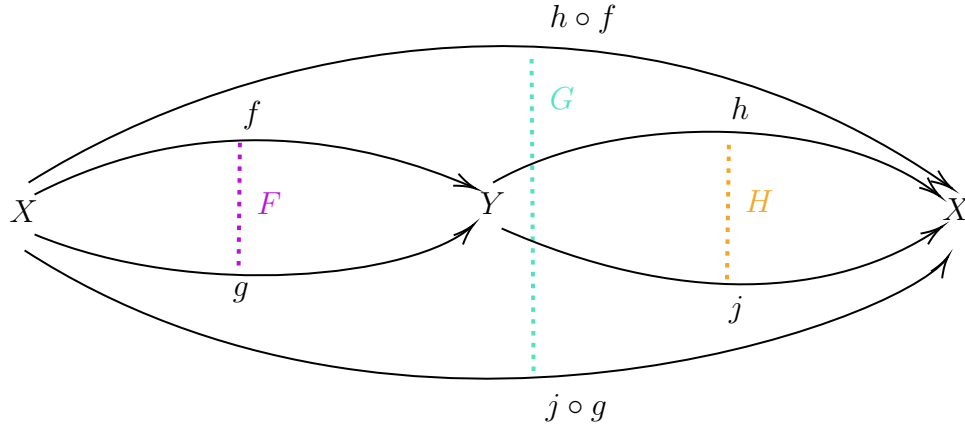
- saat yönünde bir kez dolaştırıyorsa, $\deg(f) = -1$ olur.
- saat yönünün tersine bir kez dolaştırıyorsa, $\deg(f) = 1$ olur.
- saat yönünde n kez dolanıyorsa, $\deg(f) = n$ olur.
- saat yönünün tersine n kez dolanıyorsa, $\deg(f) = n$ olur.

Bu nedenle, $[S^1, S^1]$ kümesi, her tam sayı için bir homotopi sınıfı içerir. Bu da, homotopi sınıflarının $\mathbb{Z}$ ile indekslendiğini gösterir:

$$[S^1, S^1] \cong \mathbb{Z}$$

Yani, her sürekli fonksiyon, yalnızca sarma sayısına bağlı olarak bir homotopi sınıfına aittir ve bu sınıflar tam sayılarla gösterilebilir.

Önerme 3.1.18 $f \sim g : X \rightarrow Y$ ve $h \sim j : Y \rightarrow Z$ ise $(h \circ f) \sim (j \circ g) : X \rightarrow Z$.



İspat. f ile g arasında bir homotopi $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ ve h ile j arasında bir homotopi $H : Y \times [0, 1] \rightarrow Z$ olsun. $G : X \times I \rightarrow Z$ dönüşümünü

$$G(s, t) = H(F(s, t), t)$$

şeklinde tanımlayalım. F ve H sürekli olduğundan, G dönüşümü sürekli olur. Ayrıca

$$G(s, 0) = H(F(s, 0), 0) = H(f(s), 0) = h(f(s))$$

ve

$$G(s, 1) = H(F(s, 1), 1) = H(g(s), 1) = j(g(s))$$

eşitlikleri sağlanır. Buradan G dönüşümü $f \circ h$ ve $g \circ j$ arasında homotopi tanımlar. □

Sonuç 3.1.19 *Homotopi sınıfları fonksiyonların kompozisyon işlemini korur.*

Örnek 3.1.20 X herhangi bir topolojik uzay ve $f : X \rightarrow S^n$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer f örten değilse, f fonksiyonunun bir sabit fonksiyona homotop olduğunu gösterelim.

f örten olmadığından, öyle bir $p \in S^n$ noktası vardır öyle ki $p \notin \text{Im}(f)$ olur. Buradan

$$T = S^n \setminus \{p\}$$

kümesini tanımlayalım.

T uzayı konveks bir uzaydır. Örnek 3.1.9 den yararlanarak X uzayından T uzayına giden herhangi iki sürekli fonksiyon homotop olur. Özel olarak, f (ki X uzayını T uzayına resmeder) sabit bir $c : X \rightarrow T$ fonksiyonuna homotop olacağını gösterelim. Burada $c(x) = q$ olup, $q \in T$ sabittir.

Homotopi dönüşümünü

$$H(x, t) = (1 - t)f(x) + tc(x), \quad x \in X, t \in [0, 1]$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Örnek olarak, $n = 1$ durumunda, yani birim çember S^1 için:

- $f : [0, 1] \rightarrow S^1$ fonksiyonu çemberin yarısını dolaşsın
- $p \in S^1$ noktası f fonksiyonunun görüntüsünde olmayan bir nokta olsun
- Bu durumda f sabit bir noktaya homotop olacaktır

Böylece, örten olmayan herhangi bir f fonksiyonu sabit fonksiyona homotoptur.

Örnek 3.1.21 $f : S^1 \rightarrow S^1$ fonksiyonu $f(x, y) = (-x, -y)$ şeklinde tanımlayalım. Bu fonksiyonun birim fonksiyona homotop olduğunu gösterelim.

Birim çember üzerindeki bu dönüşüm, geometrik olarak 180° dönmeye karşılık gelir. Bunu birim fonksiyona bağlayan bir homotopi $H : S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^1$

$$H(x, y, t) = \left(\frac{\cos(\pi t)(x) - \sin(\pi t)(y)}{\sqrt{(\cos(\pi t)x - \sin(\pi t)y)^2 + (\sin(\pi t)x + \cos(\pi t)y)^2}}, \frac{\sin(\pi t)(x) + \cos(\pi t)(y)}{\sqrt{(\cos(\pi t)x - \sin(\pi t)y)^2 + (\sin(\pi t)x + \cos(\pi t)y)^2}} \right)$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada her $t \in [0, 1]$ için $H(x, y, t)$

$$\left(\frac{\cos(\pi t)x - \sin(\pi t)y}{\sqrt{(\cos(\pi t)x - \sin(\pi t)y)^2 + (\sin(\pi t)x + \cos(\pi t)y)^2}} \right)^2 + \left(\frac{\sin(\pi t)x + \cos(\pi t)y}{\sqrt{(\cos(\pi t)x - \sin(\pi t)y)^2 + (\sin(\pi t)x + \cos(\pi t)y)^2}} \right)^2 = 1$$

olduğundan birim çember üzerindedir. H fonksiyonu trigonometrik ve rasyonel fonksiyonların bileşkesi olduğundan süreklidir. Ayrıca

$$H(x, y, 0) = (x, y) = Id(x, y)$$

ve

$$H(x, y, 1) = (-x, -y) = f(x, y)$$

eşitlikleri sağlanır. Buradan H dönüşümü Id birim fonksiyon ve f arasında homotopi tanımlar.

Geometrik olarak H dönüşümü birim çemberi t parametresine bağlı olarak sürekli bir şekilde döndürür:

- $t = 0$ anında hiç dönme yoktur (birim fonksiyon)
- t arttıkça, çember saat yönünde dönmeye başlar
- $t = \frac{1}{2}$ anında 90° dönmüş olur
- $t = 1$ anında toplam 180° dönmüş olur (f fonksiyonu)

Örnek 3.1.22 $f, g : S^1 \rightarrow S^1$ sürekli iki fonksiyon olsun. Bu fonksiyonların birleşiminin derecesini (degree) $\deg(f \circ g)$, $\deg(f)$ ve $\deg(g)$ cinsinden ifade edelim. $f \circ g$ fonksiyonunun $g \circ f$ fonksiyonuna homotop olduğunu gösterelim.

Birim çember üzerindeki sürekli bir fonksiyonun derecesi, çemberin etrafında kaç kez "dolaştığını" ölçer. Eğer f ve g sürekli ise birleşimin derecesi

$$\deg(f \circ g) = \deg(f) \cdot \deg(g)$$

ile verilir.

$f \circ g : S^1 \rightarrow S^1$ fonksiyonu önce g fonksiyonunun S^1 üzerindeki etkisini ardından f fonksiyonunun etkisini uygular. Derece çemberin etrafında kaç kez dolaşıldığını ölçtüğü için g fonksiyonunun derecesi kadar "dolaşma" f tarafından $\deg(f)$ kez tekrar edilir. Buradan

$$\deg(f \circ g) = \deg(f) \cdot \deg(g)$$

olarak tanımlanır.

Derece, homotopi altında değişmeyen bir özelliktir. Yani, eğer iki fonksiyon homotop ise dereceleri aynıdır. Şimdi $f \circ g$ ve $g \circ f$ fonksiyonlarının homotop olduğunu gösterelim.

$f \circ g$ ve $g \circ f$ için dereceleri

$$\deg(f \circ g) = \deg(f) \cdot \deg(g)$$

$$\deg(g \circ f) = \deg(g) \cdot \deg(f)$$

olur. Çarpma işlemi değişmeli (komütatif) olduğu için

$$\deg(f \circ g) = \deg(g \circ f)$$

elde ederiz. Bu, $f \circ g$ ve $g \circ f$ fonksiyonlarının aynı dereceye sahip olduğunu gösterir. Derece homotopi altında değişmediğinden, $f \circ g$ ve $g \circ f$ homotop olur.

$f \circ g$ ve $g \circ f$ fonksiyonları arasında $H : S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^1$ homotopisi

$$H(x, t) = (1 - t)(f \circ g)(x) + t(g \circ f)(x)$$

şeklinde tanımlanabilir. H dönüşümü süreklidir. Ayrıca, $t = 0$ için $H(x, 0) = f \circ g(x)$ ve $t = 1$ için $H(x, 1) = g \circ f(x)$ eşitlikleri sağlanır. Böylece $f \circ g$ ve $g \circ f$ homotop olur.

3.2 Homotopi Denklik

İki fonksiyonu yalnızca homotop olduklarında denk kabul etmek homeomorfizm tanımını buna uygun şekilde değiştirerek elde edilir. Bu durumda, eşitlik işaretlerini homotopilerle değiştirmeliyiz. Böyle bir yaklaşım, topolojik uzayların daha genel bir şekilde sınıflandırılmasını sağlar ve bizi "homotopi denkliği" kavramına götürür.

Homotopi denkliği, iki uzayın aynı "temel topolojik yapıya" sahip olduğunu ifade eder, ancak bu denklik, birebir bir eşleme gerektirmez. Bunun yerine, bir uzaydan diğerine sürekli bir dönüşüm ve bunun tersi bir dönüşüm bulunması, bu dönüşümlerin bileşimlerinin birim fonksiyona homotop olması yeterlidir. Bu, homeomorfizmden daha zayıf bir ilişki tanımlar, ancak birçok durumda uzayların temel özelliklerini anlamak için yeterli bir araçtır.

Tanım 3.2.1 X ve Y iki topolojik uzay olmak üzere $f : X \rightarrow Y$ ve $g : Y \rightarrow X$ sürekli fonksiyonları verilsin. Eğer,

- $g \circ f$ fonksiyonu X üzerindeki birim fonksiyona homotop, yani $g \circ f \simeq Id_X$

- $f \circ g$ fonksiyonu Y üzerindeki birim fonksiyona homotop, yani $f \circ g \simeq Id_Y$

ise X ve Y uzaylarına **homotopi denk** uzaylar denir.

$$Id_X \begin{array}{c} \curvearrowright \\ X \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{g} \end{array} \begin{array}{c} Y \\ \curvearrowleft \end{array} Id_Y$$

f ve g fonksiyonlarına **homotopi denklilikleri** denir. Eğer X ve Y homotopi denk ise

$$X \simeq Y$$

ile gösterilir.

Lemma 3.2.2 $X \simeq Y$ ve Z herhangi bir topolojik uzay olmak üzere

$$[X, Z] = [Y, Z]$$

ve

$$[Z, X] = [Z, Y]$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. $X \simeq Y$ olsun. $f : X \rightarrow Y$ ve $g : Y \rightarrow X$ sürekli fonksiyonları vardır ve bu fonksiyonların bileşimleri ilgili birim fonksiyonlara homotop olur.

$$g \circ f \simeq Id_X \quad \text{ve} \quad f \circ g \simeq Id_Y$$

$h : X \rightarrow Z$ bir fonksiyon olsun. g ile bileşke alarak $h \circ g : Y \rightarrow Z$ fonksiyonunu elde ederiz. Benzer şekilde, $j : Y \rightarrow Z$ bir fonksiyon olsun. f ile bileşke alarak $j \circ f : X \rightarrow Z$ fonksiyonunu elde ederiz. Buradan

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \simeq h \circ Id_X = h$$

$$(j \circ f) \circ g = j \circ (f \circ g) \simeq j \circ Id_Y = j$$

elde ederiz. Bu iki işlem homotopi açısından birbirinin tersidir. Çünkü h fonksiyonunu g ve f ile bileşke alıp tekrar h fonksiyonuna geri dönebiliriz. Benzer şekilde j fonksiyonunu f ve g ile bileşke alıp tekrar j fonksiyonuna geri dönebiliriz.

$$\begin{array}{ccc} Id_X \begin{array}{c} \curvearrowright \\ X \end{array} & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{g} \end{array} & \begin{array}{c} Y \\ \curvearrowleft \end{array} Id_Y \\ & \begin{array}{c} \searrow h \\ \swarrow j \circ f \end{array} & \begin{array}{c} \searrow j \\ \swarrow h \circ g \end{array} \\ & & Z \end{array}$$

Bu iki durum, h ve j fonksiyonlarının homotopi açısından birbirine ters işlemlerle eşlendiğini gösterir. Dolayısıyla, $[X, Z]$ ve $[Y, Z]$ arasında birebir bir eşleme vardır ve bu eşleme homotopi sınıflarını korur. Dolayısıyla, $[X, Z]$ ve $[Y, Z]$ arasında birebir bir eşleme olduğundan

$$[X, Z] = [Y, Z]$$

elde edilir.

Benzer şekilde, $Z \rightarrow X$ ve $Z \rightarrow Y$ fonksiyonları için f ve g ile bileşke alarak $[Z, X]$ ve $[Z, Y]$ arasında birebir bir eşleme elde ederiz. Bu da $[Z, X] = [Z, Y]$ olduğunu gösterir. $\square$

Not. İki uzayın “homotopi denk” olduğunu söylemek yerine, onların *homotop* olduğunu ifade etmek daha yaygın olarak kullanılır. “Homotopi denk” terimi daha kesin ve geleneksel bir kullanım olsa da, özellikle gayri resmi tartışmalarda “homotop” terimi daha sık tercih edilmektedir. Ancak, “homotop” teriminin teknik olarak uzaylardan ziyade dönüşümleri tanımlamak için kullanıldığı unutulmamalıdır. Bu nedenle, karışıklığı önlemek için dikkatli olunmalıdır. $\square$

Lemma 3.2.3 *X ve Y uzayları homeomorf ise, bu uzaylar aynı zamanda homotopi denktir.*

İspat. X ve Y homeomorf olduğundan, öyle $f : X \rightarrow Y$ ve $g : Y \rightarrow X$ homeomorfizmleri vardır ki:

- 1) f ve g süreklidir
- 2) f ve g birebir ve örtendir
- 3) $f \circ g = \text{Id}_Y$ ve $g \circ f = \text{Id}_X$

Lemma 3.1.11 gereği her sürekli fonksiyon kendisine homotop olduğundan

$$f \circ g \simeq f \circ g = \text{Id}_Y \implies f \circ g \simeq \text{Id}_Y$$

ve

$$g \circ f \simeq g \circ f = \text{Id}_X \implies g \circ f \simeq \text{Id}_X$$

olur. Bu durumda, f ve g fonksiyonları homotopi denkliği tanımındaki koşulları sağlar. Dolayısıyla X ve Y homotopi denktir

$$X \simeq Y$$

$\square$

Örnek 3.2.4 *X tek bir noktadan oluşan bir uzay ve $Y = \mathbb{R}$ olsun. Bu iki uzayın homotopi denk olduğunu gösterelim.*

$f : \mathbb{R} \rightarrow X$ fonksiyonu tek türlü tanımlanabilir. Çünkü X uzayının tek bir noktası vardır. Her $r \in \mathbb{R}$ için $f(r) = x_0$ olarak tanımlayalım. Burada x_0 , X uzayının tek noktasıdır.

$g : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu X uzayının tek noktasını $\mathbb{R}$ uzayında bir noktaya, diyelim ki 0 noktasına götüren fonksiyon olsun. Yani $g(x_0) = 0$ olsun. Buradan

$$(f \circ g)(x_0) = f(g(x_0)) = f(0) = x_0 = \text{Id}_X(x_0)$$

ve

$$(g \circ f)(r) = g(f(r)) = g(x_0) = 0$$

olur. Her fonksiyon kendisine homotop olduğundan lemma3.1.11 gereği

$$g \circ f = Id_X \implies g \circ f \simeq Id_X$$

elde edilir. $g \circ f$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde 0 noktasına giden sabit fonksiyondur ve sabit fonksiyon her uzayda süreklidir. Birim fonksiyon alışılmış uzayda süreklidir. $\mathbb{R}$ üzerindeki herhangi iki sürekli fonksiyon homotop olduğundan Lemma3.1.6 gereği

$$g \circ f \simeq Id_{\mathbb{R}}$$

elde edilir. Sonuç olarak X ve $\mathbb{R}$ uzayları homotopi denk olur.

$$X \simeq \mathbb{R}$$

Burada $(g \circ f)$ ve $Id_{\mathbb{R}}$ fonksiyonları arasındaki homotopi $t \in [0, 1]$ ve $r \in \mathbb{R}$ için

$$H(r, t) = (1 - t)(g \circ f)(r) + t \cdot id_{\mathbb{R}}(r) = (1 - t) \cdot 0 + t \cdot r = t \cdot r$$

ile verilebilir.

Sonuç 3.2.5 $[\mathbb{R}, \mathbb{R}] = [\{0\}, \{0\}]$. Çünkü $\{0\} \rightarrow \{0\}$ arasında yalnızca bir sürekli fonksiyon tanımlanabilir. Bu nedenle, $\{0\} \rightarrow \{0\}$ fonksiyonlarının homotopi sınıfı yalnızca bir eleman içerir. Dolayısıyla, $[\mathbb{R}, \mathbb{R}]$ de yalnızca bir eleman içerdiğinden (örnek3.1.16)

$$[\mathbb{R}, \mathbb{R}] = [\{0\}, \{0\}]$$

elde edilir.

Not. Örnek3.2.4 tek noktadan oluşan uzayın $\mathbb{R}$ ile homotopi denk olduğunu gösterir. Bu sonuç, topolojik uzayların homotopi tiplerini anlamak açısından önemlidir, çünkü $\mathbb{R}$ gibi sonsuz bir uzayın tek bir noktaya "büzülebileceğini" gösterir. □

Tanım 3.2.6 Bir uzay, tek bir noktadan oluşan bir uzayla homotopi denk ise, bu uzaya **büzülebilir** uzay denir.

Örnek 3.2.7 $\mathbb{R}$ büzülebilir uzaydır. (Örnek3.2.4)

Örnek 3.2.8 $[0, 1]$ aralığı ile tek bir noktadan oluşan $\{0\}$ uzayının homotopi denk olduğunu gösterelim. $f : [0, 1] \rightarrow \{0\}$ fonksiyonunu her $x \in [0, 1]$ için $f(x) = 0$ ve $g : \{0\} \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonunu $g(0) = 0$ olarak tanımlayalım. Buradan

$$(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(0) = 0 = Id_{\{0\}}(0)$$

ve her $x \in [0, 1]$ için

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(0) = 0$$

olur. $g \circ f$ fonksiyonunun $[0, 1]$ üzerindeki birim fonksiyona homotop olduğunu gösterelim:

$$H(x, t) = (1 - t) \cdot 0 + t \cdot x = t \cdot x$$

için

$$H(x, 0) = 0, \quad H(x, 1) = x$$

olur. Dolayısıyla, $g \circ f \simeq Id_{[0,1]}$ elde edilir. Sonuç olarak $f \circ g = Id_{\{0\}}$ ve $g \circ f \simeq Id_{[0,1]}$ olduğundan, $[0, 1]$ ve $\{0\}$ homotopi denk olur

$$[0, 1] \simeq \{0\}.$$

Bu, $[0, 1]$ aralığının büzülebilir olduğunu gösterir.

Örnek 3.2.9 $(0, 1)$ açık aralığının tek bir noktadan oluşan $\{0\}$ uzayı ile homotopi denk olduğunu gösterelim.

$f : (0, 1) \rightarrow \{0\}$ fonksiyonunu her $x \in (0, 1)$ için $f(x) = 0$ ve $g : \{0\} \rightarrow (0, 1)$ fonksiyonunu $g(0) = \frac{1}{2}$ ile tanımlayalım. Buradan

$$(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 = Id_{\{0\}}0$$

ve her $x \in (0, 1)$ için

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(0) = \frac{1}{2}$$

olur. $g \circ f$ fonksiyonunun $(0, 1)$ üzerindeki birim fonksiyona homotop olduğunu gösterelim:

$$H(x, t) = \frac{1-t}{2} + t \cdot x$$

için

$$H(x, 0) = \frac{1-0}{2} + 0 \cdot x = \frac{1}{2}$$

ve

$$H(x, 1) = \frac{1-1}{2} + 1 \cdot x = x$$

olur. Ayrıca,

$$H(x, t) = \frac{1-t}{2} + t \cdot x$$

için $x \in (0, 1)$ ve $t \in [0, 1]$ olduğundan

$$0 < x < 1 \implies 0 < H(x, t) < 1.$$

olur. Dolayısıyla, $H(x, t)$, $(0, 1)$ aralığında kalır ve H süreklidir. Sonuç olarak $f \circ g = Id_{\{0\}}$ ve $g \circ f \simeq Id_{(0,1)}$ olduğundan, $(0, 1)$ ve $\{0\}$ homotopi denktir:

$$(0, 1) \simeq \{0\}$$

Bu, $(0, 1)$ aralığının büzülebilir olduğunu gösterir.

Örnek 3.2.10 Herhangi bir (a, b) açık aralığı tek bir noktadan oluşan $\{0\}$ uzay ile homotopi denk olduğunu gösterelim. Ayrıca, bu durum sonsuz aralıklar (a, ∞) ve $(-\infty, b)$ için de geçerlidir.

Her açık aralık birbirine homeomorf olduğundan

$$(a, \infty) \simeq (-\infty, b) \simeq (a, b) \simeq (0, 1) \simeq \{0\}.$$

olur. Herhangi bir açık aralık (a, b) , (a, ∞) veya $(-\infty, b)$, tek bir noktadan oluşan bir uzay $\{0\}$ ile homotopi denktir. Bu, $\mathbb{R}$ üzerinde açık aralıkların büzülebilir olduğunu gösterir.

Örnek 3.2.11 $(0, 1)$ açık aralığı ile $[0, 1]$ kapalı aralığı arasında bir homotopi denliğini tanımlayalım.

$f : [0, 1] \rightarrow (0, 1)$ fonksiyonunu

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{2}$$

ve $g : (0, 1) \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonunu

$$g(x) = 2x - 1$$

ile tanımlayalım. Buradan

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2}\right) - 1 = x$$

ve

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x - 1) = \frac{1}{2} + \frac{2x - 1}{2} = x$$

elde edilir. Sonuç olarak $g \circ f = Id_{[0,1]}$ ve $f \circ g = Id_{(0,1)}$ olduğundan, $(0, 1)$ ve $[0, 1]$ homotopi denktir:

$$(0, 1) \simeq [0, 1]$$

Önerme 3.2.12 Eğer X büzülebilir bir uzay ve Y herhangi bir topolojik uzay ise

$$f, g : Y \rightarrow X$$

sürekli fonksiyonları homotoptur. Özellikle, büzülebilir bir uzaya giden herhangi bir sürekli fonksiyon sabit bir fonksiyona homotop olur.

İspat. $f, g : Y \rightarrow X$ sürekli iki fonksiyon olsun. X büzülebilir bir uzay olduğundan $h : X \rightarrow \{0\}$ ve $j : \{0\} \rightarrow X$ sürekli fonksiyonları için

$$h \circ j \simeq Id_{\{0\}}, \quad j \circ h \simeq Id_X$$

olur. Bu durumda:

$$f = (Id_X \circ f) \simeq (j \circ h \circ f)$$

$$g = (\text{Id}_X \circ g) \simeq (j \circ h \circ g)$$

olur. Burada $h \circ f : Y \rightarrow \{0\}$ olduğundan $j \circ h \circ f : Y \rightarrow X$ sabit bir fonksiyon olur. Yani, her $y \in Y$ için

$$(j \circ h \circ f)(y) = j(0)$$

olur. Benzer şekilde, $j \circ h \circ g :$

$$(j \circ h \circ g)(y) = j(0)$$

sabit fonksiyon olur. Dolayısıyla

$$f \simeq j \circ h \circ f, \quad g \simeq j \circ h \circ g$$

elde edilir. Sonuç olarak:

$$f \simeq g$$

olur. Bu, f ve g fonksiyonlarının homotop olduğunu gösterir. Ayrıca $j \circ h \circ f$ ve $j \circ h \circ g$ sabit fonksiyonlar olduğundan f ve g fonksiyonları sabit bir fonksiyona homotop olurlar.

□

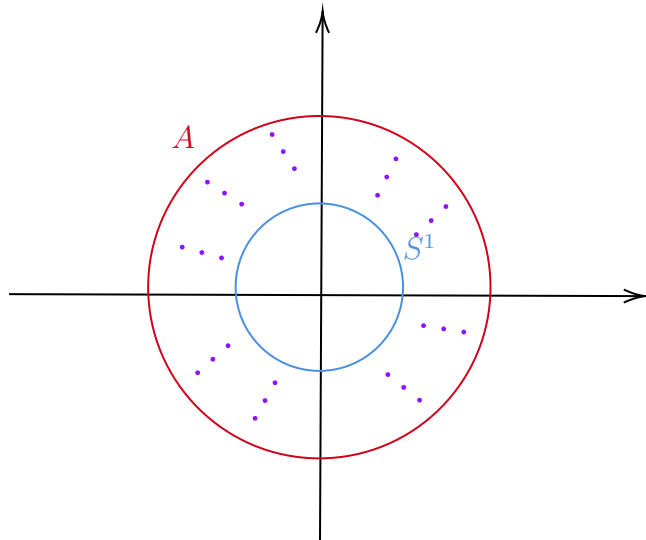
Sonuç 3.2.13 *Büzülebilir bir uzaya giden herhangi bir sürekli fonksiyon, sabit bir fonksiyona homotoptur.*

Örnek 3.2.14 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$ halkasının birim çember S^1 ile homotopi denk olduğunu göstereyim.

$f : S^1 \rightarrow A$ fonksiyonunu $f(x, y) = (x, y)$ içine dönüşüm ve $g : A \rightarrow S^1$ fonksiyonunu

$$g(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y)$$

ile tanımlayalım.



Buradan

$$(g \circ f)(x, y) = g(f(x, y)) = g(x, y) = (x, y)$$

ve

$$(f \circ g)(x, y) = f(g(x, y)) = f\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y)\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y)$$

olur. Bu, A üzerinde bir fonksiyondur ve (x, y) noktasını radyal olarak ölçeklendirilmiş bir noktaya götürür. $f \circ g$ fonksiyonunun A üzerindeki birim fonksiyona homotop olduğunu gösterebiliriz

$$F((x, y), t) = \frac{t}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y) + \frac{1-t}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y)$$

dönüşümü

$$F((x, y), 0) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y) = (f \circ g)(x, y)$$

ve

$$F((x, y), 1) = (x, y) = Id_A(x, y)$$

eşitliklerini sağlar. Ayrıca,

$$1 \leq x^2 + y^2 \leq 2 \implies F((x, y), t) \in A.$$

olduğundan $F((x, y), t)$, A içinde kalır. F fonksiyonu çarpma ve toplama işlemlerinin bileşkesi olduğundan süreklidir.

Sonuç olarak $f \circ g \simeq Id_A$ ve $g \circ f = Id_{S^1}$ olduğundan, A ve S^1 homotopi denktir:

$$A \simeq S^1$$

Örnek 3.2.15 Orijinden delinmiş düzlem $\mathbb{C}^\times = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ ile S^1 birim çemberin homotopi denk olduğunu gösterebiliriz.

$f : S^1 \rightarrow \mathbb{C}^\times$ fonksiyonunu $f(x, y) = (x, y)$ ve $g : \mathbb{C}^\times \rightarrow S^1$ fonksiyonunu

$$g(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y)$$

olarak tanımlayalım. Buradan

$$(g \circ f)(x, y) = g(f(x, y)) = g(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y) = (x, y)$$

olduğundan

$$g \circ f = Id_{S^1}$$

ve

$$(f \circ g)(x, y) = f\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y)\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y)$$

elde edilir. $f \circ g$ fonksiyonunun $\mathbb{C}^\times$ üzerindeki birim fonksiyona homotop olduğunu gösterelim

$$H((x, y), t) = ((1 - t)\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + t)(x, y)$$

için

$$H((x, y), 0) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y) = (f \circ g)(x, y)$$

ve

$$H((x, y), 1) = (x, y) = Id_{\mathbb{C}^\times}(x, y)$$

olur. $(x, y) \neq (0, 0)$ olduğundan $t \in [0, 1]$ için

$$(1 - t)\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + t > 0$$

$H((x, y), t)$ hiçbir zaman orijine gitmez. H fonksiyonu çarpma ve toplama işlemlerinin bileşkesi olduğundan süreklidir.

Sonuç olarak $g \circ f = Id_{S^1}$ ve $f \circ g \simeq Id_{\mathbb{C}^\times}$ olduğundan, $\mathbb{C}^\times$ ve S^1 homotopi denktir:

$$\mathbb{C}^\times \simeq S^1$$

Sonuç 3.2.16 Orijinden delinmiş düzlem birim çembere büzülebilir.

Örnek 3.2.17 S^0 büzülebilir değildir.

Kabul edelim ki S^0 büzülebilir bir uzay olsun. Bu durumda, S^0 ile tek bir noktadan oluşan $\{0\}$ uzayı arasında homotopi denklik vardır. Yani, $f : S^0 \rightarrow \{0\}$ ve $g : \{0\} \rightarrow S^0$ sürekli fonksiyonları vardır için

$$f \circ g = Id_{\{0\}} \quad \text{ve} \quad g \circ f \simeq Id_{S^0}$$

olur. Bu durumda, $g \circ f : S^0 \rightarrow S^0$ fonksiyonu S^0 üzerindeki birim fonksiyona homotoptur. Yani, bir $F : S^0 \times I \rightarrow S^0$ dönüşümü için

$$F(x, 0) = x \quad \text{ve} \quad F(x, 1) = g(f(x)) = g(0)$$

olur. Şimdi, $I = [0, 1]$ birim aralığından S^0 uzayına sürekli bir fonksiyon

$$h : I \rightarrow S^0, \quad h(t) = F(-g(0), t)$$

tanımlayalım. Buradan

$$h(0) = F(-g(0), 0) = -g(0)$$

ve

$$h(1) = F(-g(0), 1) = g(0)$$

olur. S^0 yalnızca iki noktadan oluştuğu için $(g(0)$ ve $-g(0))$, h fonksiyonu S^0 üzerinde örten olmalıdır. Ancak, $I = [0, 1]$ aralığı bağlantılı bir uzaydır(sonuç1.1.11) ve bağlantılı bir uzaydan bağlantılı olmayan bir uzaya sürekli örten fonksiyon tanımlanamaz(Önerme1.1.18). Bu çelişki, S^0 uzayının büzülebilir olduğu varsayımımızın yanlış olduğunu gösterir.

Önerme 3.2.18 m tane noktadan oluşan ayrık uzay ve n tane noktadan oluşan ayrık uzayın homotopi denk olması için gerek ve yeter şart $m = n$ olmasıdır.

İspat. X ve Y ayrık uzayları sırasıyla m ve n noktadan oluşsun.

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}, \quad Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$$

$\Rightarrow X$ ve Y homotopi denk olsun. Bu durumda $f : X \rightarrow Y$ ve $g : X \rightarrow Y$ sürekli fonksiyonları için

$$f \circ g \simeq \text{Id}_Y \quad \text{ve} \quad g \circ f \simeq \text{Id}_X$$

olur. $f \circ g$ bileşkesi Y üzerindeki birim fonksiyona homotop olduğundan bir $h : Y \times [0, 1] \rightarrow Y$ sürekli fonksiyonu vardır öyle ki her $i \in [n]$ için

$$h(i, 0) = f(g(i)), \quad h(i, 1) = i$$

olur. Burada $h(i, t) : [0, 1] \rightarrow Y$ sürekli bir fonksiyondur. $[0, 1]$ bağlantılı bir uzaydır olduğundan $h(i, t)$ fonksiyonunun görüntüsü Y uzayında bağlantılı bir altküme olmalıdır. Ancak, Y ayrık bir uzay olduğundan ayrık bir uzayın bağlantılı altkümeleri yalnızca tek bir noktadan oluşabilir. Bu nedenle, $h(i, t)$ fonksiyonunun görüntüsü yalnızca $\{i\}$ olabilir. Yani her $t \in [0, 1]$ için

$$h(i, t) = i$$

olur. Özel olarak $t = 0$ alınırsa

$$h(i, 0) = f(g(i)) = i$$

elde ederiz. Bu, $f \circ g = \text{Id}_Y$ olduğunu gösterir. Benzer şekilde, $g \circ f = \text{Id}_X$ olduğu gösterilebilir. Bu ise

- f örten bir fonksiyon olduğundan $n \leq m$
- g birebir bir fonksiyondur olduğundan $m \leq n$

olduğunu gösterir. Dolayısıyla,

$$m = n$$

olmalıdır.

$\Leftarrow m = n$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, X ve Y arasında birebir ve örten bir fonksiyon tanımlanabilir. Örneğin:

$$f : X \rightarrow Y, \quad f(i) = i$$

ve

$$g : Y \rightarrow X, \quad g(i) = i$$

olur. Buradan

$$f \circ g = \text{Id}_Y \quad \text{ve} \quad g \circ f = \text{Id}_X$$

elde ederiz. Dolayısıyla, X ve Y homotopi denktir. $\square$

Önerme 3.2.19 X ve Y homotopi denk ise X uzayından Y uzayına sürekli ve örten dönüşüm vardır.

İspat. Kabul edelim ki X ve Y homotopi denk olsun. Bu durumda, $f : X \rightarrow Y$ ve $g : Y \rightarrow X$ sürekli fonksiyonları vardır öyle ki:

$$g \circ f \simeq \text{Id}_X$$

ve

$$f \circ g \simeq \text{Id}_Y$$

olur. Şimdi f fonksiyonunun sürekli ve örten olduğunu gösterelim. Homotopi denkliğin tanımında f sürekli olarak tanımlanmıştır. Ayrıca $f \circ g \simeq \text{Id}_Y$ olduğundan, $f \circ g(y) \simeq y$ her $y \in Y$ için sağlanır. Bu, f fonksiyonunun örten olduğunu gösterir. $\square$

Önerme 3.2.20 X bağlantılı ve Y bağlantısız bir uzay ise, X ve Y homotopi denk olamaz.

İspat. Kabul edelim ki X ve Y homotopi denk olsun. Bu durumda $f : X \rightarrow Y$ ve $g : Y \rightarrow X$ sürekli fonksiyonları vardır öyle ki

$$f \circ g \simeq \text{Id}_Y$$

ve

$$g \circ f \simeq \text{Id}_X$$

olur. Bu, $f \circ g$ fonksiyonunun Y üzerindeki birim fonksiyona homotop olduğu anlamına gelir. Yani, öyle bir $F : Y \times [0, 1] \rightarrow Y$ sürekli fonksiyonu vardır ki her $y \in Y$ için

$$F(y, 0) = f(g(y)) \quad \text{ve} \quad F(y, 1) = y$$

olur. Y bağlantısız uzay olduğundan ayrık, açık ve boş olmayan iki alt küme ayrılabilir:

$$Y = U \sqcup V$$

burada U ve V açık, ayrık ve boş olmayan alt kümelerdir. Bu durumda, Y uzayından S^0 uzayına sürekli örten $p : Y \rightarrow S^0$ fonksiyonu tanımlanabilir. X ve Y homotopi denk olduğundan $h : X \rightarrow Y$ sürekli örten dönüşüm vardır (Önerme 3.2.19). Buradan $h \circ p : X \rightarrow S^0$ sürekli ve örten iki fonksiyonun bileşkesi olduğundan sürekli ve örten olur. Bu ise bağlantılı bir uzaydan ayrık bir uzaya sürekli örten dönüşüm olmaması ile çelişir. Bu çelişki, X ve Y uzaylarının homotopi denk olamayacağını gösterir. $\square$

Sonuç 3.2.21 *Bağlantılı bir uzay ve bağlantısız bir uzay homotopi denk olamaz.*

Sonuç 3.2.22 *Bağlantılı olma özelliği, homotopi denk olmayan uzayları ayırt etmek için kullanılabilir.*

Örnek 3.2.23 S^1 bağlantılı bir uzay S^0 bağlantısız bir uzay olduğundan S^1 ve S^0 homotopi denk değildir.

Örnek 3.2.24 $X = \{1, 2\}$ kaba topolojiye sahip bir uzay ve $Y = \{0\}$ tek noktalı bir uzay olsun. X ve Y uzaylarının homotopi denk olduğunu gösterelim.

$f : Y \rightarrow X$ fonksiyonunu $f(0) = 1$ olarak tanımlayalım. X kaba topolojiye sahip olduğundan, f sürekli bir fonksiyondur. $g : X \rightarrow Y$ fonksiyonunu $g(x) = 0$ olarak tek türlü tanımlanabilir. Y kaba topolojiye sahip olduğundan, g de sürekli bir fonksiyondur. Buradan

$$(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(1) = 0$$

ve her $x \in X$ için

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(0) = 1$$

olur. $f \circ g$ fonksiyonunun X üzerindeki birim fonksiyona homotop olduğunu gösterelim. F dönüşümünü

$$F : X \times [0, 1] \rightarrow X, \quad F(x, t) = \begin{cases} x, & \text{eğer } t \leq \frac{1}{2}, \\ 1, & \text{eğer } t > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

ile tanımlayalım. Buradan

$$F(x, 0) = x$$

ve

$$F(x, 1) = 1$$

elde edilir. Ayrıca, X kaba topolojiye sahip olduğundan, F her durumda sürekli bir fonksiyondur. Sonuç olarak $g \circ f = Id_Y$ ve $f \circ g \simeq Id_X$ olduğundan, X ve Y homotopi denktir:

$$X \simeq Y$$

Burada dikkat edilirse X kaba topolojiye sahip olduğundan Hausdorff değildir, ancak Y Hausdorff uzayıdır.

Sonuç 3.2.25 *Hausdorff olma özelliğini homotopi denliğini ayırt etmek için kullanılamaz.*

3.3 Çember

Lemma 3.3.1 (Yapıştırma Lemması (Gluing Lemma)) *X herhangi bir topolojik uzay ve $U_1, \dots, U_n$, X uzayında kapalı alt kümeler olsun. X uzayındaki her noktanın en az bir U_i kümesine ait olduğunu varsayalım. Y herhangi bir topolojik uzay ve her $i = 1, \dots, n$ için $f_i : U_i \rightarrow Y$ fonksiyonları, U_i üzerindeki alt uzay topolojisine göre sürekli olsun. Eğer her $x \in U_i \cap U_j$ için $f_i(x) = f_j(x)$ koşulu sağlanıyorsa, bu fonksiyonlar birleştirilerek bir $f : X \rightarrow Y$*

$$f(x) = f_i(x) \quad \text{eğer } x \in U_i$$

sürekli fonksiyonu elde edilir.

İspat. $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonunu $x \in U_i$ için

$$f(x) = f_i(x)$$

ile tanımlayalım. $x \in U_i \cap U_j$ ise, varsayım gereği $f_i(x) = f_j(x)$ olacağından bu fonksiyon iyi tanımlıdır.

Y uzayında herhangi bir kapalı küme K olsun. f fonksiyonunun sürekli olduğunu göstermek için, $f^{-1}(K)$ kümesinin X uzayında kapalı olduğunu gösterelim.

Her $i = 1, \dots, n$ için, f_i sürekli olduğundan, $f_i^{-1}(K)$ kümeleri kapalıdır.

$$\begin{aligned} f^{-1}(C) &= \{x \in X : f(x) \in C\} \\ &= \{x \in X : \exists \text{ } x \in U_i \text{ ve } f_i(x) \in C\}. \\ \Rightarrow f^{-1}(C) &= \bigcup_{i=1}^n (U_i \cap f_i^{-1}(C)) && \dots(\text{sonlu sayıda kapalı} \\ &&& \text{kümenin birleşimi kapalı}) \\ \Rightarrow f^{-1}(C) &\text{ kapalı} \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla, $f : X \rightarrow Y$ sürekli bir fonksiyon olur. □

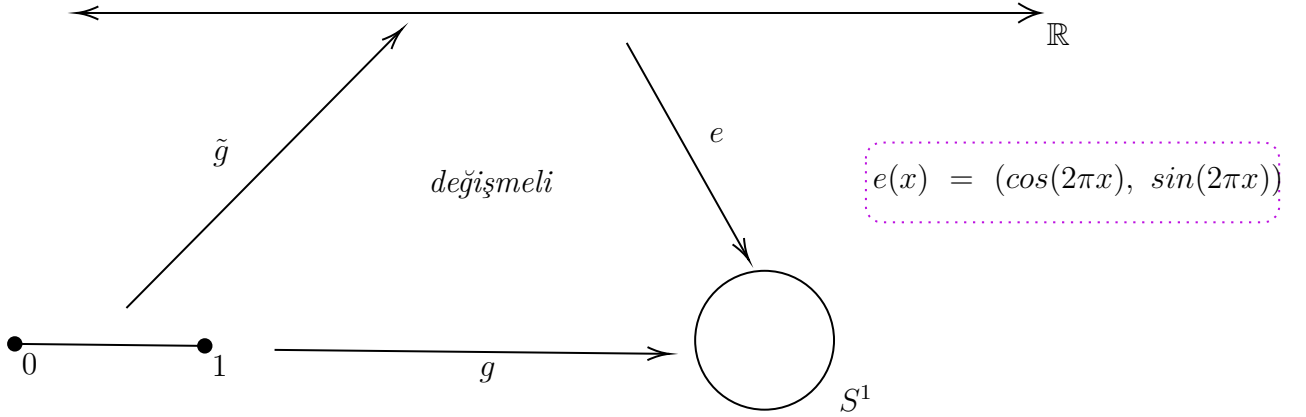
Önerme 3.3.2 (Path Lifting) $g : [0, 1] \rightarrow S^1$ sürekli bir fonksiyon ve $x \in \mathbb{R}$ için $e(x) = g(0)$ olacak şekilde bir nokta olmak üzere her $t \in [0, 1]$ için

$$e \circ \tilde{g}(t) = g(t)$$

ve

$$\tilde{g}(0) = x$$

eşitliklerini sağlayan $\tilde{g} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu tektir.



İspat. Adım 1: $\tilde{g}$ fonksiyonunu parça parça tanımlama.

S^1 üzerindeki örtme fonksiyonu $e : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ şeklindedir ve bu fonksiyon

$$e(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$$

olarak tanımlanır. $g : [0, 1] \rightarrow S^1$ sürekli bir fonksiyon olsun. $[0, 1]$ aralığını, g fonksiyonun görüntüsünün S^1 uzayında uygun alt kümelerine düştüğü küçük aralıklara bölelim.

$$U = S^1 \setminus \{(1, 0)\}, \quad V = S^1 \setminus \{(-1, 0)\}$$

olarak seçelim. U ve V açık kümelerdir ve S^1 uzayını örter. g sürekli olduğundan $g^{-1}(U)$ ve $g^{-1}(V)$ öngörüntüleri $[0, 1]$ uzayında açık alt kümelerdir ve birleşimleri $[0, 1]$ uzayını örter. $[0, 1]$ kompakt olduğundan bu açık kümelerden sonlu bir alt örtü

$$I_1, I_2, \dots, I_n$$

seçilebilir. Her I_i aralığında, $g(I_i)$ ya U kümesinde ya da V kümesinin elemanı olur. Bu durumda, e fonksiyonu için U veya V üzerindeki ön görüntüsünü kullanarak $\tilde{g}$ fonksiyonunu tanımlayalım. Örneğin, $I_1 = [\delta_0, \delta_1]$ ve $\tilde{g}(\delta_0) = x$ olarak tanımlansın. $g(I_1)$, U kümesinde ise, e fonksiyonunun U üzerindeki bir kopyasını kullanarak $\tilde{g}$ fonksiyonunu I_1 üzerinde sürekli bir şekilde tanımlayabiliriz.

Adım 2: $\tilde{g}$ fonksiyonunu tüm $[0, 1]$ üzerinde tanımlama.

Bu işlemi her I_i aralığı için tekrarlayarak $\tilde{g}$ fonksiyonunu parça parça tanımlarız. Her adımda, $\tilde{g}$ fonksiyonunu bir önceki aralıkla uyumlu olmasını sağlarız. Bu, $\tilde{g}$ fonksiyonunu sürekli olmasını garanti eder. Yapıştırma Lemmasına göre, bu parçaların birleşimi $[0, 1]$ üzerinde sürekli bir fonksiyon tanımlar.

Adım 3: $\tilde{g}$ fonksiyonunun teklik ispatı.

Şimdi, $\tilde{g}$ fonksiyonunun tek olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $\bar{g} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, g fonksiyonu için başka bir lifting ve $\bar{g}(0) = \tilde{g}(0) = x$ olsun. Buradan her $t \in [0, 1]$ için

$$e \circ \bar{g}(t) = g(t) = e \circ \tilde{g}(t)$$

olur. Bu ise $\bar{g}(t) - \tilde{g}(t) \in \mathbb{Z}$ olduğunu gösterir. Ancak, $\bar{g} - \tilde{g} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{Z}$ sürekli bir fonksiyondur ve $\mathbb{Z}$ ayrık bir uzaydır. Sürekli bir fonksiyonun görüntüsü bağlantılı bir küme olmalıdır, bu nedenle $\bar{g} - \tilde{g}$ sabit fonksiyon olmalıdır. Başlangıç koşulundan dolayı $\bar{g}(0) = \tilde{g}(0)$ olduğundan, $\bar{g}(t) = \tilde{g}(t)$ her $t \in [0, 1]$ için geçerlidir. Sonuç olarak $\tilde{g}$ tektir. $\square$

Örnek 3.3.3 $S^1 \rightarrow S^1$ şeklindeki herhangi bir sabit fonksiyonun derecesinin 0 olduğunu gösterelim.

$f : S^1 \rightarrow S^1$ sabit bir fonksiyon olsun. Yani $z \in S^1$ için $f(z) = p$ olsun. $\pi : [0, 1] \rightarrow S^1$ standart örtme fonksiyonunu

$$\pi(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

ele alalım. Buradan

$$g = f \circ \pi : [0, 1] \rightarrow S^1$$

bileşke fonksiyonu her $t \in [0, 1]$

$$g(t) = (f \circ \pi)(t) = f(\pi(t)) = p$$

sabit olur. Path Lifting Teoremi'ne göre

$$e \circ \tilde{g} = g \quad \text{ve} \quad \tilde{g}(0) = x,$$

olacak şekilde sürekli $\tilde{g} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır. Burada $x \in \mathbb{R}$ için $e(x) = g(0) = p$ sağlanır.

g sabit bir fonksiyon olduğundan, $\tilde{g}$ fonksiyonunu da her $t \in [0, 1]$ için

$$\tilde{g}(t) = x$$

sabit bir fonksiyon olarak seçelim. Buradan

$$(e \circ \tilde{g})(t) = e(\tilde{g}(t)) = e(x) = p = g(t)$$

olur. Sonuç olarak $\tilde{g}$ fonksiyonu g için bir lifting olur.

f fonksiyonunun derecesi $\tilde{g}$ sabit bir fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned} \deg(f) &= \tilde{g}(1) - \tilde{g}(0) \quad \dots (\tilde{g}(1) = \tilde{g}(0) = x) \\ &= x - x \\ &= 0 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Örnek 3.3.4 $f : S^1 \rightarrow S^1$ birim fonksiyonunun derecesinin 1 olduğunu gösterelim.

$f : S^1 \rightarrow S^1$ birim fonksiyon olsun, yani her $z \in S^1$ için $f(z) = z$ olsun. Bu fonksiyonun derecesini hesaplamak için, standart örtme fonksiyonu $\pi : [0, 1] \rightarrow S^1$ ile bileşkesini inceleyelim.

$g = f \circ \pi : [0, 1] \rightarrow S^1$ fonksiyonunu

$$g(t) = (f \circ \pi)(t) = f(\pi(t)) = \pi(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

ile tanımlayalım. g için bir lifting bulalım. Path Lifting Teoremi'ne göre,

$$e \circ \tilde{g} = g \quad \text{ve} \quad \tilde{g}(0) = 0,$$

olacak şekilde $\tilde{g} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu vardır. Burada

$$e : \mathbb{R} \rightarrow S^1, \quad e(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$$

örtme fonksiyonudur.

$\tilde{g}(t) = t$ fonksiyonunun g için bir lifting olduğunu gösterelim. Burada

$$(e \circ \tilde{g})(t) = e(\tilde{g}(t)) = e(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) = g(t)$$

olur. Ayrıca, $\tilde{g}(0) = 0$ olduğundan, $\tilde{g}$ fonksiyonu g için bir lifting olur.

f fonksiyonunun derecesi

$$\deg(f) = \tilde{g}(1) - \tilde{g}(0) = 1 - 0 = 1$$

olur.

Sonuç 3.3.5 Geometrik olarak birim fonksiyonun derecesinin 1 olması, fonksiyonun S^1 çemberini tam bir kez dolaştığını gösterir.

Örnek 3.3.6 $f : S^1 \rightarrow S^1$ fonksiyonu, n bir tamsayı olmak üzere

$$f(\cos(\theta), \sin(\theta)) = (\cos(n\theta), \sin(n\theta))$$

ile verilsin. Bu fonksiyonun derecesinin n olduğunu gösterelim.

$f : S^1 \rightarrow S^1$ fonksiyonu, S^1 çemberini kendisine dönüştüren ve her noktayı açısal olarak n katına götüren bir fonksiyondur. Bu fonksiyonun derecesini hesaplamak için, standart örtme fonksiyonu $\pi : [0, 1] \rightarrow S^1$ ile bileşkesini inceleyelim.

$g = f \circ \pi : [0, 1] \rightarrow S^1$ fonksiyonunu

$$\begin{aligned} g(t) &= (f \circ \pi)(t) \\ &= f(\pi(t)) \\ &= f(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \\ &= (\cos(n \cdot 2\pi t), \sin(n \cdot 2\pi t)) \\ &= (\cos(2n\pi t), \sin(2n\pi t)) \end{aligned}$$

ile tanımlayalım. g için bir lifting bulalım. Path Lifting Teoremi'ne göre

$$e \circ \tilde{g} = g \quad \text{ve} \quad \tilde{g}(0) = 0,$$

olacak şekilde $\tilde{g} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon vardır. Burada

$$e : \mathbb{R} \rightarrow S^1, \quad e(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$$

örtme fonksiyonudur.

$\tilde{g}(t) = nt$ fonksiyonunun g için bir lifting olduğunu gösterelim. Burada

$$\begin{aligned} (e \circ \tilde{g})(t) &= e(\tilde{g}(t)) \\ &= e(nt) \\ &= (\cos(2\pi \cdot nt), \sin(2\pi \cdot nt)) \\ &= (\cos(2n\pi t), \sin(2n\pi t)) \\ &= g(t) \end{aligned}$$

olur. Ayrıca, $\tilde{g}(0) = n \cdot 0 = 0$ olduğundan, $\tilde{g}$ fonksiyonu g için bir lifting olur. f fonksiyonunun derecesi

$$\deg(f) = \tilde{g}(1) - \tilde{g}(0) = n \cdot 1 - 0 = n$$

olur.

Sonuç 3.3.7 Geometrik olarak

$$f(\cos(\theta), \sin(\theta)) = (\cos(n\theta), \sin(n\theta))$$

fonksiyonu S^1 çemberini kendisine n kez dolayarak eşler. Eğer $n > 0$ ise, dönüş yönü korunur; eğer $n < 0$ ise, dönüş yönü tersine çevrilir. $n = 0$ durumunda, fonksiyon sabittir ve çemberi bir noktaya eşler.

Önerme 3.3.8 (Alan Bölme (Domain Splitting)) $X, \mathbb{R}^n$ uzayının kompakt bir alt kümesi $\mathcal{O}$, Y uzayının bir açık örtüsü olmak üzere $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda, öyle bir $\delta > 0$ sayısı vardır ki, X uzayının çapı δ 'dan küçük olan herhangi bir V alt kümesinin görüntüsü $\mathcal{O}$ ailesindeki kümelerden birinin içinde yer alır.

İspat. f sürekli olduğundan, $\mathcal{O}$ ailesindeki açık kümelerin f altındaki ön görüntüleri X uzayında açık kümeler olur. Bu açık kümelerin oluşturduğu aile, X uzayının bir açık örtüsü $\mathcal{W}$ olur:

$$\mathcal{W} = \{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{O}\}.$$

X kompakt olduğundan, $\mathcal{W}$ ailesinin sonlu bir

$$\mathcal{W}' = \{W_1, W_2, \dots, W_m\} \subset \mathcal{W}$$

alt örtüsü vardır. Her W_i açık olduğundan, her $x \in X$ için öyle bir $r_x > 0$ vardır ki, $B(x, r_x) \subset W_i$ olur, burada $B(x, r_x)$, merkezi x ve yarıçapı r_x olan açık küredir ve $x \in W_i$.

X kompakt olduğundan, $\{B(x, r_x/2) : x \in X\}$ açık örtüsünden sonlu bir

$$\left\{B\left(x_1, \frac{r_{x_1}}{2}\right), B\left(x_2, \frac{r_{x_2}}{2}\right), \dots, B\left(x_k, \frac{r_{x_k}}{2}\right)\right\}$$

alt örtü seçelim.

$$\delta = \min\left\{\frac{r_{x_1}}{2}, \frac{r_{x_2}}{2}, \dots, \frac{r_{x_k}}{2}\right\}$$

olarak alalım. Her $r_{x_i} > 0$ olduğundan $\delta > 0$ olur.

V , X uzayının çapı δ 'dan küçük olan herhangi bir alt kümesi olsun. V boş kümeden farklı olduğundan V 'de en az bir nokta vardır, diyelim ki bu nokta $v \in V$ olsun. $v \in X$ olduğundan en az bir j indeksi için $v \in B\left(x_j, \frac{r_{x_j}}{2}\right)$ olur. V kümesinin çapı $\delta \leq \frac{r_{x_j}}{2}$ olduğundan

$$V \subset B(v, \delta) \subset B(x_j, r_{x_j})$$

olur. $B(x_j, r_{x_j}) \subset W_i$ olacak şekilde bir i indeksi bulunabileceğinden $V \subset W_i$ olur.

$W_i = f^{-1}(U_i)$ olduğundan, $f(V) \subset f(W_i) \subset U_i$ olur. Yani, $f(V)$, $\mathcal{O}$ ailesindeki kümelerden biri olan U_i kümesinin içinde yer alır. $\square$

Lemma 3.3.9 (Lebesgue Lemması) X , $\mathbb{R}^n$ uzayının kompakt bir alt uzayı ve $\mathcal{O}$, X uzayının bir açık örtüsü olsun. Bu durumda, öyle bir $\delta > 0$ vardır ki, X uzayının çapı δ 'dan küçük olan herhangi bir U alt kümesi, $\mathcal{O}$ ailesindeki kümelerden birinin içinde yer alır.

İspat. X kompakt olduğundan, $\mathcal{O}$ ailesi sonlu sayıda açık küme $U_1, \dots, U_n$ içeren bir alt örtüye indirgeyebiliriz.

Her $1 \leq i \leq n$ için, $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu merkezi x olan ve U_i içinde kalan en büyük yarıçaplı açık kürenin yarıçapını $f_i(x)$ olarak tanımlayalım. Eğer $x \notin U_i$ ise $f_i(x) = 0$ olarak tanımlanır.

$f_i(x)$ noktasını x noktası ile $X - U_i$ kümesindeki x noktasına en yakın nokta arasındaki uzaklık olarak düşünebiliriz. Uzaklık fonksiyonu sürekli olduğundan f_i de sürekli olur.

$f : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu

$$f(x) = \max\{f_i(x) : 1 \leq i \leq n\}.$$

ile tanımlayalım. Sonlu sayıda sürekli fonksiyonun maksimumu da sürekli olduğundan, f süreklidir. Bu fonksiyon, merkezi x olan ve U_i kümelerinden en az birinin içinde kalan en büyük yarıçaplı açık kürenin yarıçapını verir.

Her $x \in X$ için $f(x) \geq \delta$ olacak şekilde $\delta > 0$ olduğunu gösterelim. Yarıçapı δ 'dan küçük olan her açık küre, U_i kümelerinden birinin içinde yer alır. Çapı δ 'dan küçük olan her küme, yarıçapı δ olan bir açık kürenin içinde yer aldığından, lemma ispatlanmış olur.

Böyle bir δ 'nın varlığını göstermek için, her $x \in X$ için $f(x) > 0$ olduğunu not edelim. Bu, 0 noktasının f fonksiyonunun görüntüsünde olmadığı anlamına gelir. X kompakt ve f sürekli olduğundan, f fonksiyonun görüntüsü $\mathbb{R}$ uzayının kompakt bir alt kümesidir. Heine-Borel Teoremi'ne göre, bu görüntü $\mathbb{R}$ uzayının kapalı bir alt kümesidir, dolayısıyla

tümleyeni açıktır. Bu tümleyen 0 noktasını içerdiğinden, 0 etrafında bir $(-\delta, \delta)$ aralığını da içerir. Bu nedenle, her $x \in X$ için $f(x) \geq \delta$ olur.

Sonuç olarak, X uzayının çapı δ 'dan küçük olan herhangi bir alt kümesi, $\mathcal{O}$ ailesindeki kümelerden birinin içinde yer alır. $\square$

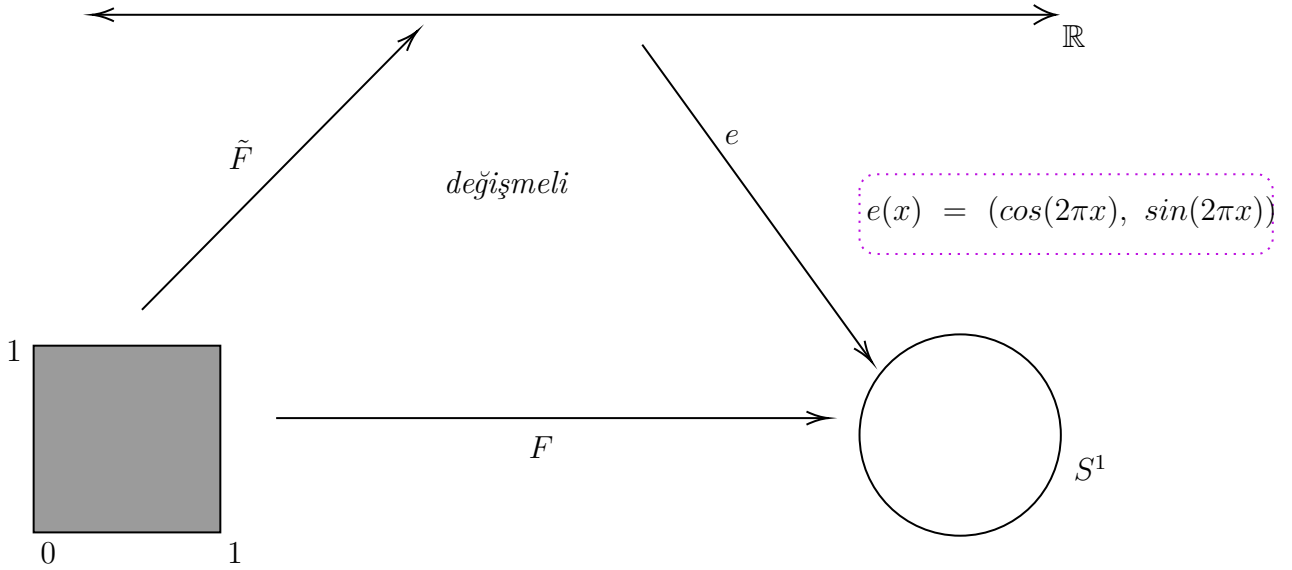
Önerme 3.3.10 (Homotopy Lifting) $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S^1$ sürekli bir fonksiyon ve $x \in \mathbb{R}$ için $e(x) = F(0, 0)$ olacak şekilde bir nokta olmak üzere her $s, t \in [0, 1]$ için

$$e \circ \tilde{F}(s, t) = F(s, t)$$

ve

$$\tilde{F}(0, 0) = x$$

eşitliklerini sağlayan $\tilde{F} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu tektir.



İspat. Bu önerme, Path Lifting Teoremi'nin iki boyutlu bir genellemesi olarak düşünülebilir. İspatı benzer bir yaklaşımla vereceğiz.

Adım 1: $[0, 1] \times [0, 1]$ karesini küçük karelere bölme.

S^1 çemberini

$$U = S^1 \setminus \{(1, 0)\}, \quad V = S^1 \setminus \{(-1, 0)\}$$

açık kümelerine bölelim. Domain Splitting Önermesi'ni kullanarak, öyle bir $\delta > 0$ sayısı vardır ki, $[0, 1] \times [0, 1]$ karesinin çapı δ 'dan küçük olan herhangi bir alt kümesinin görüntüsü, F altında ya U kümesine ya da V kümesine düşer.

$[0, 1] \times [0, 1]$ karesini $n \times n$ karelerine bölelim, burada n sayısı $\frac{1}{n} < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$ olacak şekilde seçilir. Bu durumda, her küçük karenin çapı δ 'dan küçük olur ve dolayısıyla her küçük kare, F altında ya U kümesine ya da V kümesine düşer.

Adım 2: $\tilde{F}$ fonksiyonunu parça parça tanımlama.

$\tilde{F}(0, 0) = x$ alalım. İlk küçük kare $[0, \frac{1}{n}] \times [0, \frac{1}{n}]$ üzerinde $\tilde{F}$ fonksiyonunu tanımlayalım. F bu kareyi ya U kümesine ya da V kümesine götürür. $e^{-1}(U)$ veya $e^{-1}(V)$ kümelerinden uygun bir bileşenini seçerek ve bu bileşen ile U veya V arasındaki bir homeomorfizmi kullanarak, $\tilde{F}$ fonksiyonunu bu kare üzerinde tanımlayabiliriz.

Böylece, $\tilde{F}(0, \frac{1}{n})$ değerini tanımlamış oluruz. Bu değeri kullanarak, $\tilde{F}$ fonksiyonunu $[0, \frac{1}{n}] \times [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$ karesi üzerinde tanımlayabiliriz. Ancak, bu durumda $[0, \frac{1}{n}] \times \frac{1}{n}$ kenarı üzerinde $\tilde{F}$ fonksiyonunu yeniden tanımlamış oluruz. Path Lifting Teoremi'nin teklik kısmı, bu iki tanımın aynı olmasını garanti eder.

Benzer şekilde, $\tilde{F}$ fonksiyonunu $[0, \frac{1}{n}] \times [0, \frac{3}{n}]$ üzerinde, sonra da tüm $[0, \frac{1}{n}] \times [0, 1]$ şeridi üzerinde tanımlayabiliriz.

$\tilde{F}(\frac{1}{n}, 0)$ değerini kullanarak, $\tilde{F}$ fonksiyonunu $[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \times [0, \frac{1}{n}]$ karesi üzerinde tanımlayabiliriz. Bu, $\frac{1}{n} \times [0, \frac{1}{n}]$ kenarı üzerinde $\tilde{F}$ fonksiyonunu yeniden tanımlamayı gerektirir, yine Path Lifting Teoremi'nin tekliği, bu tanımın önceki tanımla aynı olmasını sağlar.

Bu şekilde devam ederek, $\tilde{F}$ fonksiyonunu tüm $[0, 1] \times [0, 1]$ karesi üzerinde tanımlayabiliriz.

Adım 3: $\tilde{F}$ fonksiyonunun tekliğini gösterme.

$\bar{F}$, F fonksiyonu için başka bir lifting olsun ve $\bar{F}(0, 0) = \tilde{F}(0, 0) = x$ olsun. Her $(s, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$ için:

$$e \circ \bar{F}(s, t) = F(s, t) = e \circ \tilde{F}(s, t)$$

olur. Bu, $\bar{F}(s, t) - \tilde{F}(s, t) \in \mathbb{Z}$ olduğunu gösterir. $\bar{F}$ ve $\tilde{F}$ sürekli olduğundan ve $[0, 1] \times [0, 1]$ bağlantılı olduğundan, $\bar{F} - \tilde{F}$ sabit bir fonksiyon olmalıdır. $\bar{F}(0, 0) = \tilde{F}(0, 0) = x$ olduğundan, bu sabit 0 olmalıdır. Yani, $\bar{F} = \tilde{F}$ elde edilir. Sonuç olarak $\tilde{F}$ tektir. $\square$

Önerme 3.3.11 $f, g : S^1 \rightarrow S^1$ homotop iki fonksiyon ise $\deg(f) = \deg(g)$ olur.

İspat. f ve g homotop olduğundan, her $z \in S^1$ için

$$H(z, 0) = f(z) \quad \text{ve} \quad H(z, 1) = g(z)$$

sürekli $H : S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^1$ fonksiyonu vardır. S^1 çemberini $[0, 1]$ aralığı ile parametrize ederek, H fonksiyonunu $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S^1$ şeklinde düşünebiliriz. Homotopy Lifting Teoremi'ne göre her $s, t \in [0, 1]$ için

$$e \circ \tilde{H}(s, t) = H(s, t)$$

olacak şekilde sürekli $\tilde{H} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır. Burada $e : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $e(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$ örtme fonksiyonudur.

$\tilde{H}$ fonksiyonunu $[0, 1] \times \{0\}$ üzerine kısıtladığımızda, f fonksiyonu için bir lifting elde ederiz. f fonksiyonunun derecesi

$$\deg(f) = \tilde{H}(1, 0) - \tilde{H}(0, 0)$$

olur. Benzer şekilde, $\tilde{H}$ fonksiyonunu $[0, 1] \times \{1\}$ üzerine kısıtladığımızda, g fonksiyonu için bir lifting elde ederiz. g fonksiyonunun derecesi

$$\deg(g) = \tilde{H}(1, 1) - \tilde{H}(0, 1)$$

olur. $D : [0, 1] \rightarrow \mathbb{Z}$ fonksiyonunu

$$D(t) = \tilde{H}(1, t) - \tilde{H}(0, t)$$

ile tanımlayalım. Buradan $\deg(f) = D(0)$ ve $\deg(g) = D(1)$ olur.

$\tilde{H}$ sürekli olduğundan D sürekli bir fonksiyon olur. Ayrıca, D fonksiyonunun görüntüsü $\mathbb{Z}$ içindedir. $[0, 1]$ bağlantılı bir uzay ve $\mathbb{Z}$ ayrık bir uzay olduğundan, bağlantılı bir uzaydan ayrık bir uzaya giden her sürekli fonksiyon sabit fonksiyon olacağından D sabit bir fonksiyon olur. Sonuç olarak

$$\deg(f) = D(0) = D(1) = \deg(g)$$

elde edilir. □

Lemma 3.3.12 $g : S^1 \rightarrow S^1$ bir fonksiyon ve $(x, y) \in S^1$ bir nokta ise, öyle bir $h : S^1 \rightarrow S^1$ fonksiyonu vardır ki, h fonksiyonu g ile homotoptur ve $h(\pi(0)) = (x, y)$ koşulunu sağlar.

İspat. $g(\pi(0))$ noktasından (x, y) noktasına olan açığı θ olarak tanımlayalım. S^1 çemberi üzerinde, bir noktadan diğerine olan açı, iki nokta arasındaki en kısa yayın açısıdır.

$H : S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^1$ fonksiyonunu $H(p, t)$, p noktasının $t\theta$ açısı kadar döndürülmüş hali olarak tanımlayalım. Yani, H fonksiyonu, S^1 üzerindeki her noktayı, t parametresine bağlı olarak, 0 ile θ arasında değişen bir açı kadar döndürür. Buradan her $p \in S^1$ için

$$H(p, 0) = p$$

ve

$$H(p, 1) = p \text{ noktasının } \theta \text{ açısı kadar döndürülmüş hali}$$

olur. Özellikle:

$$H(g(\pi(0)), 1) = g(\pi(0)) \text{ noktasının } \theta \text{ açısı kadar döndürülmüş hali} = (x, y),$$

ve her $p \in S^1$ için

$$H(g(p), 0) = g(p)$$

olur. H sürekli bir fonksiyon olduğundan, g ile $h : S^1 \rightarrow S^1$ fonksiyonu arasında bir homotopi tanımlar, burada h her $p \in S^1$ için

$$h(p) = H(g(p), 1)$$

ile tanımlanır. Buradan

$$h(\pi(0)) = H(g(\pi(0)), 1) = (x, y)$$

elde edilir. Dolayısıyla, h fonksiyonu g ile homotop olur ve $h(\pi(0)) = (x, y)$ koşulunu sağlar. □

Önerme 3.3.13 $f, g : S^1 \rightarrow S^1$ fonksiyonları için $\deg(f) = \deg(g)$ ise, f ve g homotoptur.

İspat. İspatı iki adımda yapacağız. İlk olarak, özel bir durum için homotopi kuracağız, sonra genel duruma geçeceğiz.

Adım 1: $(f \circ \pi)(0) = (g \circ \pi)(0)$ durumu.

Path Lifting Teoremi'ne göre, f ve g fonksiyonları için

$$e \circ \tilde{f} = f \circ \pi, \quad e \circ \tilde{g} = g \circ \pi, \quad \text{ve} \quad \tilde{f}(0) = \tilde{g}(0).$$

olacak şekilde sürekli $\tilde{f}, \tilde{g} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları ile lifting olur. Derece tanımından

$$\deg(f) = \tilde{f}(1) - \tilde{f}(0), \quad \deg(g) = \tilde{g}(1) - \tilde{g}(0)$$

yazabiliriz. $\deg(f) = \deg(g)$ olduğundan

$$\tilde{f}(1) - \tilde{f}(0) = \tilde{g}(1) - \tilde{g}(0)$$

ve $\tilde{f}(0) = \tilde{g}(0)$ olduğundan

$$\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$$

elde edilir. $\tilde{H} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu

$$\tilde{H}(s, t) = t\tilde{f}(s) + (1 - t)\tilde{g}(s)$$

ile tanımlayalım. Bu, $\tilde{f}$ ve $\tilde{g}$ arasında doğrusal bir homotopi tanımlar. $\tilde{H}$ süreklidir ve

$$\tilde{H}(s, 0) = \tilde{g}(s), \quad \tilde{H}(s, 1) = \tilde{f}(s)$$

olur. Ayrıca, $\tilde{H}(0, t) = t\tilde{f}(0) + (1 - t)\tilde{g}(0) = \tilde{f}(0) = \tilde{g}(0)$ olduğundan, $\tilde{H}(0, t)$ t 'ye bağlı değildir. Benzer şekilde, $\tilde{H}(1, t) = t\tilde{f}(1) + (1 - t)\tilde{g}(1) = \tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$ olduğundan, $\tilde{H}(1, t)$ de t 'ye bağlı değildir. Bu nedenle, $\tilde{H}(1, t) - \tilde{H}(0, t) = \tilde{f}(1) - \tilde{f}(0) = \deg(f)$ bir tamsayıdır.

$H = e \circ \tilde{H} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S^1$ fonksiyonunu tanımlayalım. $H(0, t) = H(1, t)$ olduğundan, H fonksiyonunu $S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^1$ olarak düşünebiliriz. Bu, f ve g arasında bir homotopi tanımlar:

$$H(z, 0) = (e \circ \tilde{H})(\pi^{-1}(z), 0) = (e \circ \tilde{g})(\pi^{-1}(z)) = g(z)$$

$$H(z, 1) = (e \circ \tilde{H})(\pi^{-1}(z), 1) = (e \circ \tilde{f})(\pi^{-1}(z)) = f(z)$$

Adım 2: Genel durum.

Genel durumda, $(f \circ \pi)(0) \neq (g \circ \pi)(0)$ olabilir. Bu durumda, g ile homotop olan ve f ile $\pi(0)$ noktasında aynı değeri alan bir g' fonksiyonu tanımlamamız gerekir.

S^1 üzerinde herhangi iki nokta arasında bir yol vardır. Bu yolu kullanarak, g ile homotop olan ve f ile $\pi(0)$ noktasında aynı değeri alan bir g' fonksiyonu tanımlayabiliriz. Sonra, Adım 1'i f ve g' için uygulayarak, f ve g' fonksiyonlarının homotop olduğunu gösterebiliriz. g ve g' homotop olduğundan, homotopi ilişkisinin geçişli olması nedeniyle, f ve g de homotop olur. $\square$

Önerme 3.3.14 S^1 çemberi büzülebilir değildir .

İspat. Çemberin büzülebilir olduğunu varsayalım. Bu durumda, S^1 tek noktaya homotopi denk olmalıdır. Yani $f : S^1 \rightarrow \{0\}$ ve $g : \{0\} \rightarrow S^1$ fonksiyonları için

$$g \circ f \simeq 1_{S^1}$$

olmalıdır. f fonksiyonu, S^1 uzayından tek noktalı kümeye giden bir fonksiyon olduğundan, $f(x, y) = 0$ her $(x, y) \in S^1$ için sağlanır. Benzer şekilde, g fonksiyonu, tek noktalı kümeden S^1 uzayına giden bir fonksiyon olduğundan, $g(0) = (a, b)$ olacak şekilde sabit bir $(a, b) \in S^1$ noktası vardır. Bu durumda, bileşke fonksiyon $g \circ f : S^1 \rightarrow S^1$ her $(x, y) \in S^1$ için

$$(g \circ f)(x, y) = g(f(x, y)) = g(0) = (a, b)$$

olur. Yani, $g \circ f$ sabit bir fonksiyondur. Sabit fonksiyonların derecesi 0 olduğundan

$$\deg(g \circ f) = 0$$

elde ederiz. Öte yandan, 1_{S^1} birim fonksiyonunun derecesi

$$\deg(1_{S^1}) = 1$$

olur. Eğer iki fonksiyon homotop ise, dereceleri eşit olmalıdır. Ancak

$$\deg(g \circ f) = 0 \neq 1 = \deg(1_{S^1})$$

oldüğundan, $g \circ f$ ve 1_{S^1} homotop olamaz. Bu, başlangıçtaki varsayımımızla çelişir. Dolayısıyla, S^1 büzülebilir değildir. $\square$

Önerme 3.3.15 $S^1 \rightarrow S^1$ şeklindeki sürekli fonksiyonların homotopi sınıflarının kümesi, tamsayılar kümesi ile birebir eşleniktir, yani $[S^1, S^1] \simeq \mathbb{Z}$.

İspat. Her sürekli $f : S^1 \rightarrow S^1$ fonksiyonunun bir derecesi vardır ve bu derece bir tamsayıdır. Derece fonksiyonu $\deg : [S^1, S^1] \rightarrow \mathbb{Z}$ şeklinde tanımlanır, burada $S^1 \rightarrow S^1$ şeklindeki sürekli fonksiyonların homotopi sınıflarının kümesi $[S^1, S^1]$ olur.

İspatı iki adımda yapacağız:

Adım 1: $\deg$ fonksiyonu birebirdir.

$f, g : S^1 \rightarrow S^1$ iki sürekli fonksiyon ve $\deg(f) = \deg(g)$ ise, o zaman f ve g homotoptur (Önerme 3.3.13). Dolayısıyla, farklı homotopi sınıflarındaki fonksiyonların dereceleri farklıdır. Bu, $\deg$ fonksiyonunun birebir olduğunu gösterir.

Adım 2: $\deg$ fonksiyonu örtendir.

Her $n \in \mathbb{Z}$ için $\deg(f_n) = n$ olacak şekilde sürekli $f_n : S^1 \rightarrow S^1$ fonksiyonu vardır. Bu fonksiyonu her $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$ için

$$f_n(z) = z^n$$

ile tanımlayabiliriz. Örneğin, $n = 1$ için, $f_1(z) = z$ birim fonksiyondur ve $\deg(f_1) = 1$ olur. $n = 0$ için, $f_0(z) = 1$ sabit fonksiyondur ve $\deg(f_0) = 0$ olur. $n = -1$ için, $f_{-1}(z) = \bar{z}$ (kompleks eşlenik) fonksiyonudur ve $\deg(f_{-1}) = -1$ olur.

Genel olarak, f_n fonksiyonunun derecesi n olur (Örnek 3.3.6). Dolayısıyla, her tamsayı, bir fonksiyonun derecesi olarak gerçekleşir. Bu, $\deg$ fonksiyonunun örten olduğunu gösterir.

Sonuç olarak $\deg : [S^1, S^1] \rightarrow \mathbb{Z}$ fonksiyonu hem birebir hem de örten olduğundan

$$[S^1, S^1] \cong \mathbb{Z}$$

elde edilir. $\square$

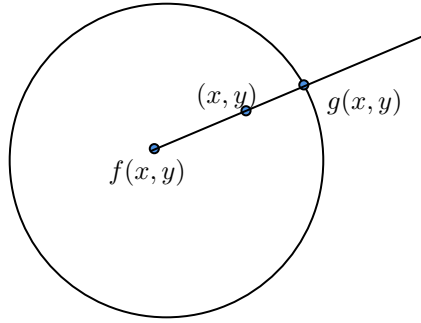
Daha önce $[0, 1]$ aralığından kendisine giden herhangi bir sürekli fonksiyonun bir sabit noktası olması gerektiğini göstermiştik. S^1 'den S^1 'e giden sürekli fonksiyonları kullanarak, bu teoremin Brouwer'e ait iki boyutlu bir versiyonunu verelim.

Teorem 3.3.16 (Brouwer Sabit Nokta Teoremi) $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ kapalı diski üzerinde tanımlı her sürekli $f : D^2 \rightarrow D^2$ fonksiyonunun en az bir sabit noktası vardır. Yani en az bir $(x, y) \in D^2$ noktası için $f(x, y) = (x, y)$ olur.

İspat. Kabul edelim ki $f : D^2 \rightarrow D^2$ fonksiyonunun hiçbir sabit noktası olmasın. Yani, her $(x, y) \in D^2$ için $f(x, y) \neq (x, y)$ olsun. Buradan her $(x, y) \in D^2$ noktası için

1. (x, y) ve $f(x, y)$ noktalarından geçen bir doğru çizeriz.
2. Bu doğruyu (x, y) noktasının ötesine, D^2 'nin sınırına (S^1 çemberine) kadar uzatırız.
3. Bu doğrunun S^1 ile kesiştiği noktayı $g(x, y)$ olarak adlandırırız.

Böylece $g : D^2 \rightarrow S^1$ şeklinde bir fonksiyon tanımlamış oluruz.



(x, y) noktası (x', y') noktasına yakınsa, f sürekli olduğundan $f(x, y)$ de $f(x', y')$ noktasına yakın olur. Bu durumda, $g(x, y)$ de $g(x', y')$ noktasına yakın olacağından g fonksiyonu süreklidir.

Eğer $(x, y) \in S^1$ ise (yani disk sınırında ise), $g(x, y) = (x, y)$ olur, çünkü (x, y) zaten sınırdadır. $F : S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^1$ fonksiyonunu

$$F((x, y), t) = g(tx, ty)$$

ile tanımlayalım. F sürekli bir fonksiyondur ve $h(x, y) = F((x, y), 0)$ ile $j(x, y) = F((x, y), 1)$ fonksiyonları arasında bir homotopi tanımlar.

$h(x, y) = g(0, 0)$ olduğundan, h sabit bir fonksiyondur ve $\deg(h) = 0$ olur.

$j(x, y) = g(x, y) = (x, y)$ olduğundan (çünkü $(x, y) \in S^1$), j birim fonksiyondur ve $\deg(j) = 1$ 'dir.

Eğer F , h ve j arasında bir homotopi ise, bu fonksiyonların dereceleri eşit olmalıdır. Ancak $\deg(h) = 0 \neq 1 = \deg(j)$ olduğundan, F fonksiyonu var olamaz. Bu da g fonksiyonunun var olamayacağı anlamına gelir.

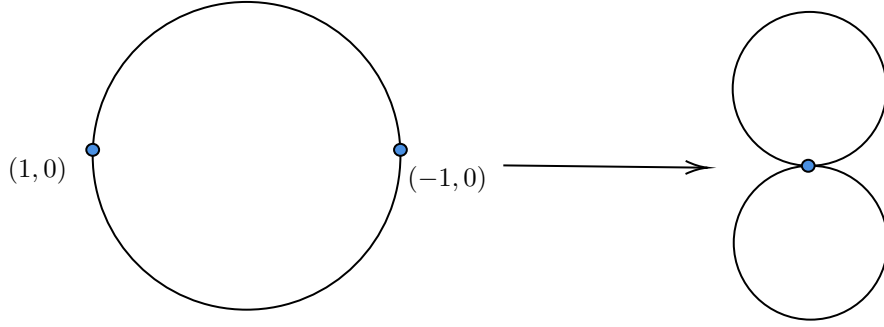
Dolayısıyla, başlangıçtaki varsayımımız yanlıştır ve $f : D^2 \rightarrow D^2$ fonksiyonunun en az bir sabit noktası olmalıdır. $\square$

Bölüm 4

Homotopi Grupları

$S^1 \rightarrow S^1$ şeklindeki sürekli fonksiyonların homotopi sınıflarının $[S^1, S^1] \cong \mathbb{Z}$ olduğunu gösterdik. $\mathbb{Z}$ bir Abelyen grup olduğundan, $[S^1, S^1]$ de bir grup yapısına sahiptir. Bu grup işlemini topolojik olarak şu şekilde açıklayabiliriz:

S^1 çemberini $(1, 0)$ ile $(-1, 0)$ noktalarından birbirine yapıştıralım.



Bu işlem sonucunda, bir noktada birleşen iki çemberden oluşan bir uzay elde ederiz.

X herhangi bir topolojik uzay ve $f, g : S^1 \rightarrow X$ iki sürekli fonksiyon olsun. Bu fonksiyonları birleştirerek yeni bir

$$f \# g : S^1 \rightarrow X$$

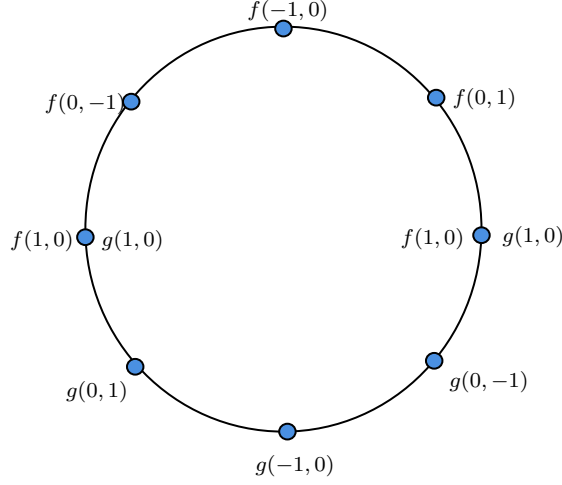
funksiyonu tanımlayalım. Bunun için, önce S^1 iki çembere bölünür, sonra üst çemberi f ile, alt çemberi g ile resmedilir.

Ancak, iki çemberin ortak noktasında çelişkili tanımlar oluşabilir. Bu nedenle, f ve g fonksiyonlarının en az bir noktada aynı değeri alması gerekir. Kolaylık için, bu noktayı S^1 üzerindeki $(1, 0)$ noktası olarak seçebiliriz. Yani, $f(1, 0) = g(1, 0)$ olmalıdır.

Bu koşul altında, $f \# g : S^1 \rightarrow X$ fonksiyonu

$$(f \# g)(t) = \begin{cases} f(2t), & \text{eğer } t \leq \frac{1}{2}, \\ g(2t - 1), & \text{eğer } t \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

ile tanımlanır. Burada t , S^1 çemberini parametrize eden $[0, 1]$ aralığındaki bir değerdir.



f ve g fonksiyonları için sırasıyla $\tilde{f}$ ve $\tilde{g}$ birer lifting olsun. $g(1, 0) = f(1, 0)$ olduğundan, $\tilde{g}(0) = \tilde{f}(1)$ olacak şekilde $\tilde{g}$ tanımlayabiliriz. Buradan $f \# g$ için birer lifting

$$\widetilde{f \# g}(t) = \begin{cases} \tilde{f}(2t), & \text{eğer } t \leq \frac{1}{2}, \\ \tilde{g}(2t - 1), & \text{eğer } t \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

olur. $f \# g$ fonksiyonunun derecesi

$$\begin{aligned} \widetilde{f \# g}(1) - \widetilde{f \# g}(0) &= \tilde{g}(1) - \tilde{f}(0) \\ &= \tilde{g}(1) - \tilde{g}(0) + \tilde{f}(1) - \tilde{f}(0) \\ &= \deg(g) + \deg(f). \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla

$$\deg(f \# g) = \deg(f) + \deg(g)$$

olur. Bu, $\#$ işleminin $\mathbb{Z}$ içindeki toplama işlemine karşılık geldiğini gösterir. Bu nedenle, $\#$ işlemini $S^1 \rightarrow S^1$ fonksiyonları kümesinde bir toplama işlemi olarak düşünebiliriz.

4.1 Homotopi Grupları

$S^1 \rightarrow S^1$ sürekli fonksiyonlarının homotopi sınıflarının kümesinin, $[S^1, S^1] \cong \mathbb{Z}$, bir Abelyen grup olduğunu biliyoruz. Bu grup yapısını, daha genel bir şekilde, herhangi bir X uzayı için homotopi sınıflarına uygulayabiliriz. Ancak, bunu düzgün bir şekilde ifade edebilmek için "işaretli uzaylar" (pointed spaces) kavramını kullanmamız gerekiyor.

Tanım 4.1.1 (İşaretli Uzay) *Bir işaretli uzay, bir topolojik X uzayı ve bu uzayın belirli bir $x_0 \in X$ noktasından oluşur. Bu noktaya temel nokta (base point) denir. İşaretli bir uzay (X, x_0) ile gösterilir.*

Tanım 4.1.2 (İşaretli Dönüşüm) *İşaretli dönüşümler, işaretli uzaylar arasında tanımlanan sürekli fonksiyonlardır. Yani, $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ bir işaretli dönüşüm ise,*

$$f(x_0) = y_0$$

eşitliği sağlanır.

Tanım 4.1.3 (İşaretli Homotopi) *İşaretli homotopiler, işaretli dönüşümler arasında tanımlanan homotopilerdir ve her $t \in [0, 1]$ için*

$$F(x_0, t) = y_0$$

eşitliği sağlanır.

Tanım 4.1.4 (Çember için İşaretli Dönüşümler) S^1 çemberi için temel nokta olarak $(1, 0)$ seçilir. Bu durumda, $f, g : S^1 \rightarrow (X, x_0)$ işaretli dönüşümler olmak üzere

$$f(1, 0) = g(1, 0) = x_0$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 4.1.5 (Birleştirme İşlemi) *İşaretli dönüşümlerin $\#$ işlemi ile birleştirilmesi*

$$(f \# g)(1, 0) = x_0$$

işaretli bir dönüşümünü oluşturur.

Tanım 4.1.6 (Topolojik Çift) *Bir topolojik çift, bir topolojik X uzayı ve onun bir A alt uzayından oluşur. Bu çift, (X, A) ile gösterilir.*

Tanım 4.1.7 (Topolojik Çiftin Dönüşümü) *Bir topolojik çiftin dönüşümü, $(X, A) \rightarrow (Y, B)$ şeklinde sürekli bir fonksiyondur ve*

$$f(A) \subseteq B$$

eşitliğini sağlar.

Tanım 4.1.8 *İki işaretli dönüşüm $f, g : (S^n, \partial S^n) \rightarrow (X, x_0)$ için $\#$ birleştirme işlemi*

$$(f \# g)(s_1, \dots, s_n) = \begin{cases} f(s_1, \dots, s_{n-1}, 2s_n), & \text{eğer } s_n \leq \frac{1}{2}, \\ g(s_1, \dots, s_{n-1}, 2s_n - 1), & \text{eğer } s_n \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

ile tanımlanır.

Teorem 4.1.9 (Homotopi Uyumluluğu) *Eğer $f \sim f'$ ve $g \sim g'$ işaretli homotopilerle homotop ise, $f \# g \sim f' \# g'$ olur.*

Tanım 4.1.10 (Homotopi Sınıfları Üzerinde Toplama) $S^n \rightarrow X$ işaretli dönüşümlerin homotopi sınıfları kümesi $\pi_n(X)$ üzerinde toplama işlemi

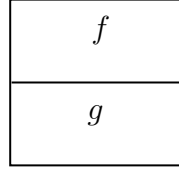
$$[f] + [g] = [f \# g]$$

ile tanımlanır. Burada $[f]$, f fonksiyonunun homotopi sınıfını ifade eder.

Sonuç 4.1.11 Tanımlanan toplama işlemi $\pi_n(X)$ kümesini bir grup yapar.

Uyarı 4.1.12 $\pi_n(X)$ her zaman Abelyen olmayabilir. $n = 1$ ve $X = S^1$ olduğunda, $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ ve bu grup Abelyen'dir. Daha yüksek boyutlarda, grup yapısı daha karmaşık olabilir.

Not. Tüm koordinatlar dışında s_1 ve s_n koordinatlarını bastırarak (görmezden gelerek), $(S^n, \partial S^n)$ üzerindeki dönüşümlerin toplama işlemi iki boyutta şu şekilde tasvir edilebilir:



Burada çember, S^n 'i temsil eder ve yatay çizgi, $s_n = \frac{1}{2}$ düzlemini gösterir. Üst yarı küre f ile, alt yarı küre g ile dönüşümü gösterir. $\square$

Önerme 4.1.13 $f \sim f'$ ve $g \sim g'$ işaretli homotopiler ile homotop ise $f \# g \sim f' \# g'$ işaretli bir homotopi ile homotop olur.

İspat. $F : S^n \times [0, 1] \rightarrow X$ ve $G : S^n \times [0, 1] \rightarrow X$, sırasıyla f fonksiyonunu f' fonksiyonuna ve g fonksiyonunu g' fonksiyonuna işaretli homotopilerle bağlayan sürekli fonksiyonlar olsun. Buradan her $t \in [0, 1]$ için

$$F(x, 0) = f(x), \quad F(x, 1) = f'(x), \quad F(x_0, t) = x_0$$

ve

$$G(x, 0) = g(x), \quad G(x, 1) = g'(x), \quad G(x_0, t) = x_0$$

olur. $f \# g$ fonksiyonunu $f' \# g'$ fonksiyonuna bağlayan bir işaretli homotopi $H : S^n \times [0, 1] \rightarrow X$

$$H(x, t) = F_t \# G_t,$$

ile tanımlayalım. Burada $F_t : S^n \rightarrow X$ ve $G_t : S^n \rightarrow X$ dönüşümleri her $t \in [0, 1]$ için

$$F_t(x) = F(x, t), \quad G_t(x) = G(x, t)$$

sırasıyla F ve G homotopilerinin t anındaki kesitlerini temsil eder. Yani, F_t ve G_t dönüşümleri $S^n \rightarrow X$ işaretli dönüşümlerdir.

F ve G sürekli olduğundan ve $\#$ işleminin sürekli dönüşümler arasında tanımlandığından $\#$ işlemi, S^n uzayını iki parçaya böler. İlk parça ($s_n \leq \frac{1}{2}$) F_t ile dönüşür. İkinci parça ($s_n \geq \frac{1}{2}$) G_t ile dönüşür. Bu nedenle, H sürekli bir fonksiyondur.

F ve G işaretli homotopiler olduğundan her $t \in [0, 1]$ için

$$F(x_0, t) = x_0, \quad G(x_0, t) = x_0$$

olduğundan $F_t(x_0) = x_0$ ve $G_t(x_0) = x_0$ olur. Buradan

$$H(x_0, t) = (F_t \# G_t)(x_0) = x_0$$

elde edilir. Bu, H dönüşümünün işaretli bir homotopi olduğunu gösterir. Ayrıca

$$H(x, 0) = F_0 \# G_0 = f \# g$$

ve

$$H(x, 1) = F_1 \# G_1 = f' \# g'$$

olduğundan H dönüşümün $f \# g$ fonksiyonununundan $f' \# g'$ fonksiyonununa bir homotopi olur. $\square$

Önerme 4.1.14 (Sıfır Elemanın Varlığı) $c : S^n \rightarrow X$ temel noktaya giden sabit fonksiyon olsun. Herhangi bir $f : S^n \rightarrow X$ fonksiyonu için, $f \# c$ ve $c \# f$ fonksiyonları f ile homotop olur. (Yani, $\pi_n(X)$ toplama işlemi $(+)$ için bir sıfır elemana sahiptir.)

İspat. Herhangi bir $f : S^n \rightarrow X$ fonksiyonu için, $f \# c$ fonksiyonunun f fonksiyonu ile homotop olduğunu gösterelim.

$H : S^n \times [0, 1] \rightarrow X$ homotopisini

$$H((s_1, \dots, s_n), t) = \begin{cases} x_0, & \text{eğer } s_n \leq \frac{t}{2}, \\ f(s_1, \dots, s_{n-1}, \frac{2s_n - t}{2-t}), & \text{eğer } s_n \geq \frac{t}{2}. \end{cases}$$

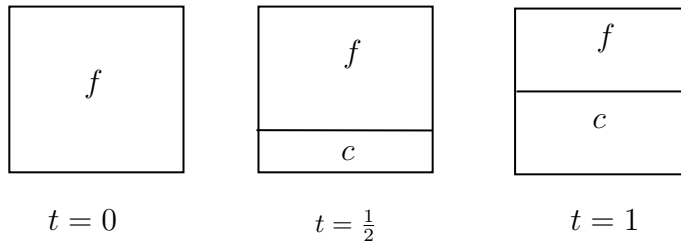
ile tanımlayalım. Buradan

$$H((s_1, \dots, s_n), 1) = \begin{cases} c(s_1, \dots, s_{n-1}, 2s_n), & \text{eğer } s_n \leq \frac{1}{2}, \\ f(s_1, \dots, s_{n-1}, 2s_n - 1), & \text{eğer } s_n \geq \frac{1}{2} \end{cases} = (c \# f)(s_1, \dots, s_n)$$

ve

$$H((s_1, \dots, s_n), 0) = f(s_1, \dots, s_n)$$

olur. Geometrik olarak s_1 ve s_n koordinatları dışındaki tüm koordinatları bastırarak, H dönüşümünü iki boyutta



şeklinde gösterebiliriz.

Benzer şekilde, $f \# c$ fonksiyonunun f fonksiyonu ile homotop olduğu

$$H((s_1, \dots, s_n), t) = \begin{cases} f(s_1, \dots, s_{n-1}, \frac{2s_n}{2-t}), & \text{eğer } s_n \leq \frac{1-t}{2}, \\ x_0, & \text{eğer } s_n \geq \frac{1-t}{2}. \end{cases}$$

dönüşümü ile gösterilebilir.

Sonuç olarak bu homotopiler, $f \# c \sim f$ ve $c \# f \sim f$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla, $[c]$ sınıfı $\pi_n(X)$ 'in toplama işlemi için sıfır elemanıdır:

$$[f] + [c] = [c] + [f] = [f]$$

□

Sonuç 4.1.15 $\pi_n(X)$ toplama işlemi $(+)$ için bir sıfır elemana sahiptir.

Önerme 4.1.16 (Ters Elemanın Varlığı) Her $f : S^n \rightarrow X$ fonksiyonu için öyle bir $\bar{f} : S^n \rightarrow X$ fonksiyonu vardır ki, $f \# \bar{f}$ ve $\bar{f} \# f$ sabit fonksiyon c ile homotop olur.

İspat.

$$f : (S^n, \partial S^n) \rightarrow (X, x_0) \text{ için, } \bar{f} : (S^n, \partial S^n) \rightarrow (X, x_0)$$

$$\bar{f}(s_1, \dots, s_n) = f(s_1, \dots, s_{n-1}, 1 - s_n)$$

ile tanımlayalım. Bu tanım, son koordinatı ters çevirir, yani s_n yerine $1 - s_n$ kullanır.

$f \# \bar{f}$ fonksiyonundan c fonksiyonuna bir H homotopisini

$$H((s_1, \dots, s_n), t) = \begin{cases} (f \# \bar{f})(s_1, \dots, s_{n-1}, \frac{1-t}{2}), & \text{eğer } \frac{1-t}{2} \leq s_n \leq \frac{1+t}{2}, \\ (f \# \bar{f})(s_1, \dots, s_{n-1}, s_n), & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

ile tanımlayalım.

$s_n = \frac{1-t}{2}$ için tanım açıkça tutarlıdır. $s_n = \frac{1+t}{2}$ için çelişkili görünebilir, ancak

$$\begin{aligned} (f \# \bar{f})(s_1, \dots, s_{n-1}, \frac{1+t}{2}) &= \bar{f}(s_1, \dots, s_{n-1}, t) \\ &= f(s_1, \dots, s_{n-1}, 1-t) \\ &= (f \# \bar{f})(s_1, \dots, s_{n-1}, \frac{1-t}{2}) \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Yapıştırma lemması gereği, H sürekli bir fonksiyondur ve ∂S^n 'in sınırında sabittir, dolayısıyla işaretli bir homotopidir. Ayrıca $t = 0$ için H fonksiyonu $f \# \bar{f}$, $t = 1$ için H fonksiyonu tüm noktaları $(f \# \bar{f})(s_1, \dots, s_{n-1}, 0)$ noktasına, yani temel noktaya götürür. Bu, H dönüşümünün $f \# \bar{f}$ fonksiyonundan c fonksiyonuna bir homotopi olduğunu gösterir.

$\bar{f} \# f \sim c$ olduğunu benzer şekilde ispatlayabiliriz. Alternatif olarak, $\bar{\bar{f}} = f$ olduğunu gözlemleyerek ve yukarıdaki ispatı $\bar{f}$ için uygulayarsak

$$\bar{f} \# \bar{\bar{f}} \sim c \implies \bar{f} \# f \sim c$$

sonucuna ulaşılır. Sonuç olarak her f için bir $\bar{f}$ fonksiyonu

$$[f] + [\bar{f}] = [\bar{f}] + [f] = [c]$$

olacak şekilde bulunur. Bu da $[\bar{f}]$ fonksiyonunun $[f]$ fonksiyonunun ters elemanı olduğunu gösterir. $\square$

Sonuç 4.1.17 $\pi_n(X)$ de toplama işlemi ters elemana sahiptir.

Önerme 4.1.18 (Toplama İşleminin Birleşme Özelliği) Eğer $f, g, h : S^n \rightarrow X$ işaretli dönüşümler olmak üzere $(f \# g) \# h$ dönüşümü $f \# (g \# h)$ dönüşümü ile homotoptur.

İspat. $H : S^n \times [0, 1] \rightarrow X$ homotopisini

$$H((s_1, \dots, s_n), t) = \begin{cases} f(s_1, \dots, s_{n-1}, \frac{4s_n}{2-t}), & \text{eğer } s_n \leq \frac{2-t}{4}, \\ g(s_1, \dots, s_{n-1}, 4s_n + t - 2), & \text{eğer } \frac{2-t}{4} \leq s_n \leq \frac{3-t}{4}, \\ h(s_1, \dots, s_{n-1}, \frac{4s_n+t-3}{t+1}), & \text{eğer } s_n \geq \frac{3-t}{4}. \end{cases}$$

ile tanımlayalım. $t = 0$ için $(f \# g) \# h$ ve $t = 1$ ise için $f \# (g \# h)$ olur.

H dönüşümünün $s_n = \frac{2-t}{4}$ ve $s_n = \frac{3-t}{4}$ noktalarında tutarlı olduğunu gösterelim.
 $s_n = \frac{2-t}{4}$ için

$$H((s_1, \dots, s_n), t) = f(s_1, \dots, s_{n-1}, \frac{4s_n}{2-t})$$

ve

$$H((s_1, \dots, s_n), t) = g(s_1, \dots, s_{n-1}, 4s_n + t - 2)$$

olur. $s_n = \frac{2-t}{4}$ için

$$f(s_1, \dots, s_{n-1}, \frac{4 \cdot \frac{2-t}{4}}{2-t}) = f(s_1, \dots, s_{n-1}, 1)$$

ve

$$g(s_1, \dots, s_{n-1}, 4 \cdot \frac{2-t}{4} + t - 2) = g(s_1, \dots, s_{n-1}, 1)$$

olur. Bu, f ve g fonksiyonlarının işaretli dönüşümler olduğu göz önüne alındığında tutarlıdır. $s_n = \frac{3-t}{4}$ için

$$H((s_1, \dots, s_n), t) = g(s_1, \dots, s_{n-1}, 4s_n + t - 2)$$

ve

$$H((s_1, \dots, s_n), t) = h(s_1, \dots, s_{n-1}, \frac{4s_n + t - 3}{t+1}).$$

olur. $s_n = \frac{3-t}{4}$ için

$$g(s_1, \dots, s_{n-1}, 4 \cdot \frac{3-t}{4} + t - 2) = g(s_1, \dots, s_{n-1}, 1),$$

ve

$$h(s_1, \dots, s_{n-1}, \frac{4 \cdot \frac{3-t}{4} + t - 3}{t+1}) = h(s_1, \dots, s_{n-1}, 1).$$

olacağından tutarlıdır. Ayrıca

$$H((s_1, \dots, s_n), 0) = \begin{cases} f(s_1, \dots, s_{n-1}, 2s_n), & \text{eğer } s_n \leq \frac{1}{2}, \\ g(s_1, \dots, s_{n-1}, 4s_n - 2), & \text{eğer } \frac{1}{2} \leq s_n \leq \frac{3}{4}, \\ h(s_1, \dots, s_{n-1}, 4s_n - 3), & \text{eğer } s_n \geq \frac{3}{4}. \end{cases}$$

olması $(f \# g) \# h$ dönüşümüne karşılık gelir.

$$H((s_1, \dots, s_n), 1) = \begin{cases} f(s_1, \dots, s_{n-1}, 4s_n), & \text{eğer } s_n \leq \frac{1}{4}, \\ g(s_1, \dots, s_{n-1}, 4s_n - 1), & \text{eğer } \frac{1}{4} \leq s_n \leq \frac{1}{2}, \\ h(s_1, \dots, s_{n-1}, 4s_n - 3), & \text{eğer } s_n \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

olması ise $f \# (g \# h)$ dönüşümüne karşılık gelir.

Sonuç olarak H dönüşümü $(f \# g) \# h$ fonksiyonundan $f \# (g \# h)$ fonksiyonuna bir homotopi tanımlar. $\square$

Sonuç 4.1.19 $\pi_n(X)$ de toplama işlemi asosyatif (birleşeli) olur.

Sonuç 4.1.20 $\pi_n(X)$ de toplama işlemi ile bir grup olur.

Tanım 4.1.21 (n 'inci Homotopi Grubu) Bir X topolojik uzayı ve bir $x_0 \in X$ temel noktası verildiğinde, n 'inci homotopi grubu $\pi_n(X, x_0)$, S^n n -boyutlu küresinden X uzayına olan ve S^n uzayının bir temel noktasını x_0 noktasına götüren işaretli dönüşümlerin homotopi sınıflarının kümesidir. Bu küme, $\#$ işlemi ile tanımlanan toplama işlemi altında bir grup yapısına sahiptir. Yani

$$\pi_n(X, x_0) = [S^n, X]_{x_0},$$

burada $[S^n, X]_{x_0}$, $S^n \rightarrow X$ olan ve temel noktaları koruyan dönüşümlerin homotopi sınıflarını temsil eder.

Toplama işlemi

$$[f] + [g] = [f \# g],$$

ile tanımlanır. Burada $f, g : (S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$ işaretli dönüşümlerdir. Grup yapısı

- $([f] + [g]) + [h] = [f] + ([g] + [h]).$
- $[c]$, $c : S^n \rightarrow X$ sabit dönüşüm ve her $s \in S^n$ için $c(s) = x_0$

- Her $[f]$ için bir $[\bar{f}]$ vardır öyle ki $[f] + [\bar{f}] = [\bar{f}] + [f] = [c]$.

ile sağlanır. Eğer $n \geq 2$ ise, $\pi_n(X, x_0)$ grubu Abelyan grup olur.

Tanım 4.1.22 (Null-homotop Dönüşüm) Bir $f : X \rightarrow Y$ dönüşümü, eğer bir sabit dönüşüme homotop ise null-homotop olarak adlandırılır. Yani, f dönüşümü için bir homotopi $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ var ve $c : X \rightarrow Y$ sabit dönüşümü için

$$H(x, 0) = f(x)$$

oluyorsa f null-homotoptur.

Örnek 4.1.23 (Konveks Alt Küme Üzerine Null-homotopluk) Herhangi bir $f : S^n \rightarrow X$ dönüşümü, eğer $X \subseteq \mathbb{R}^n$ konveks bir alt küme ise null-homotoptur. Yani, f , sabit bir dönüşüme homotoptur.

$X \subseteq \mathbb{R}^n$ konveks bir alt küme ve $f : S^n \rightarrow (X, x_0)$ işaretli bir dönüşüm olsun. f fonksiyonunun sabit dönüşüm $c : S^n \rightarrow X$ ile homotop olduğunu gösterelim. H dönüşümü

$$H(x, t) = tf(x) + (1 - t)x_0, \quad \text{her } x \in S^n \text{ ve } t \in [0, 1]$$

ile tanımlansın. Buradan

$$H(x, 0) = 0 \cdot f(x) + 1 \cdot x_0 = x_0$$

ve

$$H(x, 1) = 1 \cdot f(x) + 0 \cdot x_0 = f(x)$$

olur. S^n 'in temel noktası $(1, 0, \dots, 0)$ olsun. Buradan

$$H((1, 0, \dots, 0), t) = tf(1, 0, \dots, 0) + (1 - t)x_0$$

için f işaretli bir dönüşüm olduğundan $f(1, 0, \dots, 0) = x_0$ olacağından

$$H((1, 0, \dots, 0), t) = tx_0 + (1 - t)x_0 = x_0$$

elde edilir. Bu H dönüşümünün temel noktayı koruduğunu gösterir.

Sonuç olarak f , sabit dönüşüm c ile homotoptur. Dolayısıyla, f homotopi sınıfında sabit dönüşümle aynı sınıfa ait olacağından

$$\pi_n(X) = \{0\}$$

olur. X konveks bir alt küme olmak üzere $S^n \rightarrow X$ olan tüm işaretli dönüşümler null-homotop olur.

Tanım 4.1.24 (Eilenberg-MacLane Uzayı) Bir G grubu ve bir $n \geq 1$ tam sayısı verildiğinde, bir $K(G, n)$ Eilenberg-MacLane uzayı,

1. $\pi_n(K(G, n)) \cong G$ (yani, n 'inci homotopi grubu G grubuna izomorf).

2. $\pi_i(K(G, n)) = 0$ her $i \neq n$ için (yani, diğer tüm homotopi gruplar aşıkardır(trivial).)

özelliklerini sağlayan bir topolojik uzaydır.

Başka bir deyişle, bir Eilenberg-MacLane uzay, sadece n 'inci homotopi grubunda G grubuna izomorf olan diğer homotopi grupları aşıkardır olan bir uzaydır.

Not.

- Bir G grubu ve n sayısı için bir $K(G, n)$ uzayı her zaman vardır.
- $K(G, n)$ uzayı homotopi denkliği anlamında tektir. Yani, aynı G ve n için iki farklı $K(G, n)$ uzayı birbirine homotopi denktir.
- Eilenberg-MacLane uzayları, homotopi teorisinde önemli bir rol oynar. Özellikle, sınıflandırma uzayları ve kohomoloji teorisi ile yakından ilişkilidirler.

□

Tanım 4.1.25 (Sınıflandırma Uzayı ve $K(G, 1)$) $n = 1$ için $K(G, 1)$ Eilenberg-MacLane uzayına G grubu için bir **sınıflandırma uzayı** (classifying space) denir ve genellikle BG ile gösterilir.

- $\pi_1(BG) \cong G$
- her $n \neq 1$ için $\pi_n(BG) = 0$

Başka bir deyişle, BG uzayı, sadece birinci homotopi grubu G grubuna izomorf olan ve diğer tüm homotopi grupları sıfır olan uzaydır.

Örnek 4.1.26 (S^1 bir Eilenberg-MacLane Uzayıdır) S^1 çemberi, $K(\mathbb{Z}, 1)$ bir Eilenberg-MacLane uzayıdır.

S^1 çemberin birinci temel grubu, çember üzerindeki kapalı yolların homotopi sınıflarını temsil eder. Bu yolların her biri, çemberi belirli bir sayıda dolandır (pozitif veya negatif yönde). Bu nedenle, $\pi_1(S^1)$ tam sayılar grubuna izomorftur.

$S^2 \rightarrow S^1$ bir dönüşümünü ele alalım. Bu dönüşümü S^1 'in evrensel örtüsü olan $\mathbb{R}$ uzayına lifting yapılabilir. Ancak, $\mathbb{R}$ konveks bir uzaydır ve bu nedenle tüm dönüşümler bir sabit fonksiyona homotoptur. Bu, $S^2 \rightarrow S^1$ dönüşümünün sabit bir fonksiyona homotop olduğunu gösterir. Dolayısıyla, $\pi_2(S^1) = 0$ olur.

Yukarıdaki argüman, $n > 1$ için de geçerlidir. $S^n \rightarrow S^1$ bir dönüşümü, S^1 çemberinin evrensel örtüsü olan $\mathbb{R}$ uzayına lifting yapılabilir. $\mathbb{R}$ konveks olduğu için, bu dönüşüm bir sabit fonksiyona homotoptur. Dolayısıyla her $n > 1$ için $\pi_n(S^1) = 0$ olur.

Sonuç olarak S^1 , $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ ve $\pi_n(S^1) = 0$ ($n > 1$) özelliklerini sağladığı için $K(\mathbb{Z}, 1)$ bir Eilenberg-MacLane uzayıdır.

Sonuç 4.1.27 S^1 , $\mathbb{Z}$ grubu için bir sınıflandırma uzayıdır (classifying space).

$$B\mathbb{Z} \simeq S^1$$

Tanım 4.1.28 (($n - 1$)-Bağlantılı Uzay) Bir X topolojik uzayı eğer her $i < n$ için $\pi_i(X) = 0$ oluyorsa X uzayına $(n - 1)$ -bağlantılı (n -1-connected) uzay denir.

Örnek 4.1.29 (Hopf Dönüşümü) $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$ olduğunu Hopf 1930'larda göstermiştir. Bu, homotopi teorisinin başlangıcı olarak kabul edilir. Hopf, $\mathbb{R}^4$ ile $\mathbb{C}^2$ özdeşleştirerek $H : S^3 \rightarrow S^2$ bir dönüşüm tanımlamıştır.

$\mathbb{R}^4$ uzayında (x_1, y_1, x_2, y_2) noktası $\mathbb{C}^2$ uzayında (z_1, z_2) çifti ile ifade edilir, burada $z_1 = x_1 + iy_1$ ve $z_2 = x_2 + iy_2$. S^3 , $\mathbb{C}^2$ uzayında $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$ koşulunu sağlayan noktalar kümesi olmak üzere Hopf dönüşümü

$$H(z_1, z_2) = \frac{z_1}{z_2}$$

ile tanımlanır. Burada $z_2 = 0$ olduğunda $\frac{z_1}{z_2} = \infty$ olarak tanımlanır. Ayrıca $H(z_1, z_2)$, $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ile özdeşleştirilen S^2 'ye bir dönüşüm verir.

Hopf Dönüşümünün Özellikleri:

- H sürekli bir dönüşümdür.
- H 'nin S^2 üzerindeki herhangi bir noktasının ters görüntüsü, bir çember S^1 'e homeomorftur.
- Bu dönüşüm, $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$ olduğunu gösterir. Yani, S^3 'ten S^2 'ye olan dönüşümler, tam sayılarla ölçülen bir homotopi sınıfına sahiptir.

Lemma 4.1.30 X ve Y işaretli uzaylar ise

$$\pi_n(X \times Y) \cong \pi_n(X) \times \pi_n(Y)$$

sağlanır.

İspat. $f_X : S^n \rightarrow X$ ve $f_Y : S^n \rightarrow Y$ iki sürekli dönüşümleri yardımıyla $f : S^n \rightarrow X \times Y$ sürekli bir dönüşümü

$$f \leftrightarrow (f_X, f_Y).$$

tanımlanabilir. Benzer şekilde, $g : S^n \rightarrow X \times Y$ başka bir dönüşüm olsun. $F : S^n \times [0, 1] \rightarrow X \times Y$, f ile g arasında bir homotopi olsun. Bu durumda, F , f_X ile g_X arasında bir homotopi $F_X : S^n \times [0, 1] \rightarrow X$ ve f_Y ile g_Y arasında bir homotopi $F_Y : S^n \times [0, 1] \rightarrow Y$ homotopi çifti ile tanımlanır.

$$F \leftrightarrow (F_X, F_Y)$$

$f : S^n \rightarrow X \times Y$ bir işaretli dönüşüm ise, bu dönüşüm $f_X : S^n \rightarrow X$ ve $f_Y : S^n \rightarrow Y$ işaretli dönüşümlerinden oluşan bir çift ile ilişkilidir. Benzer şekilde, işaretli homotopiler de bu çiftler arasında bir ilişki kurar.

Buradan $\pi_n(X \times Y)$ ile $\pi_n(X) \times \pi_n(Y)$ arasında birebir bir eşleme vardır. Yani $[f]$, f 'nin homotopi sınıfını, $[f_X]$ ve $[f_Y]$ ise sırasıyla f_X ve f_Y 'nin homotopi sınıfları olmak üzere

$$[f] \leftrightarrow ([f_X], [f_Y])$$

yazabiliriz. Bu eşleme, homotopi sınıfları üzerindeki toplama işlemini de korur. $\pi_n(X \times Y)$ üzerindeki toplama işlemi, $\pi_n(X)$ ve $\pi_n(Y)$ üzerindeki toplama işlemlerine

$$[f] + [g] \leftrightarrow ([f_X] + [g_X], [f_Y] + [g_Y])$$

karşılık gelir. Sonuç olarak bu birebir eşleme ve toplama işleminin korunması, $\pi_n(X \times Y)$ grubunun $\pi_n(X) \times \pi_n(Y)$ grubuna izomorf olduğunu gösterir:

$$\pi_n(X \times Y) \cong \pi_n(X) \times \pi_n(Y)$$

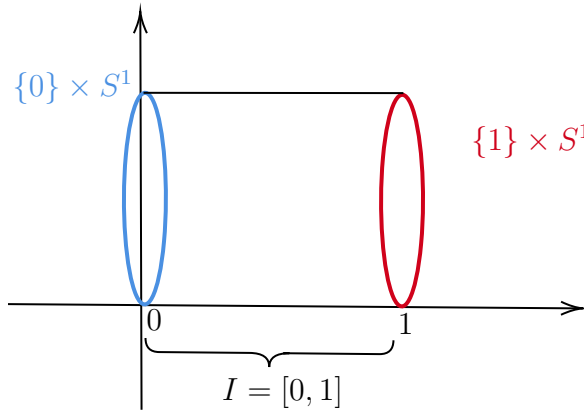
□

Örnek 4.1.31 (Silindirin Homotopi Grupları) Silindir $C = I \times S^1$, S^1 çemberi ile $I = [0, 1]$ aralığının çarpımıdır. I aralığı büzülebilir bir uzaydır, yani tüm homotopi grupları aşıkardır. Bu nedenle, silindirin homotopi grupları

$$\pi_n(C) = \pi_n(I \times S^1) = \pi_n(I) \times \pi_n(S^1) = \pi_n(S^1)$$

olarak elde edilir. Silindirin homotopi grupları, yalnızca S^1 çemberinin homotopi gruplarına eşittir.

Geometrik olarak silindir, S^1 çemberinin bir "uzantısı" olarak düşünülebilir. I aralığı büzülebilir olduğu için, silindirin homotopi özellikleri yalnızca S^1 'in homotopi özelliklerine bağlıdır.



Örnek 4.1.32 (Torusun Homotopi Grupları) Torus $T^2 = S^1 \times S^1$, iki çemberin çarpımıyla elde edilen bir yüzeydir.

- **Birinci Homotopi Grubu:**

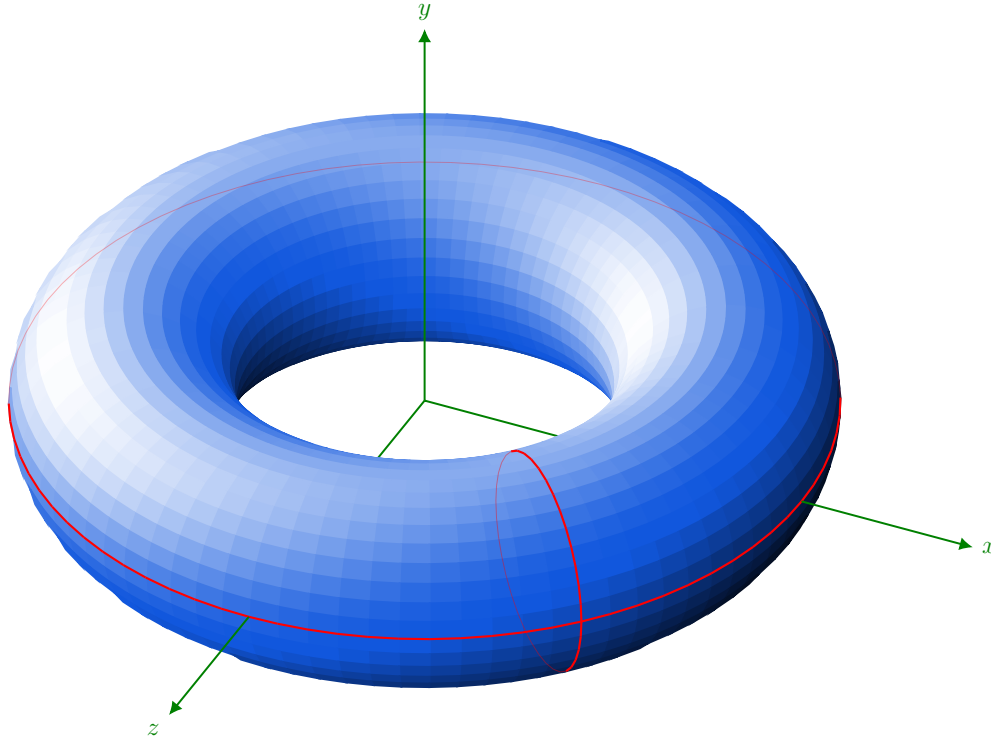
$$\pi_1(T^2) = \pi_1(S^1 \times S^1) \cong \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Bu, torusun birinci temel grubunun iki çemberin dolanma sayılarıyla ölçüldüğünü gösterir. Yani, torus üzerindeki kapalı yollar, iki bağımsız çember boyunca dolanma sayılarıyla ifade edilir.

• **Yüksek Boyutlu Homotopi Grupları:**

$$\pi_n(T^2) = \pi_n(S^1 \times S^1) \cong \pi_n(S^1) \times \pi_n(S^1)$$

S^1 için $\pi_n(S^1) = 0$ ($n > 1$) olduğundan, torus için de $\pi_n(T^2) = 0$ ($n > 1$) olur.



Örnek 4.1.33 $\mathbb{R}^2 - S^1$ uzayının homotopi gruplarını hesaplayalım.

$\mathbb{R}^2 - S^1$, $\mathbb{R}^2$ düzleminden bir çemberin çıkarılmasıyla elde edilen uzaydır. Bu uzayın homotopi gruplarını anlamak için, uzayın homotopi açısından neye benzediğini inceleyelim.

$\mathbb{R}^2 - S^1$, homotopi açısından bir çember ile homotopi denktir. Bunun nedeni, $\mathbb{R}^2 - S^1$ 'in bir çemberin etrafında "delik" oluşturmastır. Bu delik, uzayın homotopi yapısını belirler. Dolayısıyla:

$$\mathbb{R}^2 - S^1 \simeq S^1$$

olur.

S^1 'in homotopi gruplarını kullanarak $\mathbb{R}^2 - S^1$ 'in homotopi gruplarını hesaplayabiliriz:

- $\pi_0(\mathbb{R}^2 - S^1) = \pi_0(S^1) = 1$: Uzay yol bağlantılıdır.
- $\pi_1(\mathbb{R}^2 - S^1) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$: Çemberin birinci temel grubu tam sayılar grubuna izomorftur.
- $\pi_i(\mathbb{R}^2 - S^1) = \pi_i(S^1) = 0$ her $i > 1$ için: S^1 'in daha yüksek homotopi grupları sıfırdır.

4.2 Açığa Çıkan Homomorfizmler

Tanım 4.2.1 (Açığa Çıkan Homomorfizm) $f : X \rightarrow Y$ işaretli bir sürekli dönüşüm olsun, f fonksiyonuna bağlı olarak açığa çıkan fonksiyon

$$f_* : \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(Y)$$

vardır. Bu fonksiyon, herhangi bir $j : S^n \rightarrow X$ işaretli dönüşümünü

$$f_*([j]) = [f \circ j]$$

ile tanımlar. Burada $[j]$, j dönüşümünün homotopi sınıfını ifade eder ve $[f \circ j]$, $f \circ j$ bileşiminin homotopi sınıfıdır.

Özellikler:

- f_* , homotopi sınıfları arasında bir fonksiyon tanımlar.
- f_* , grup yapısını korur, yani bir homomorfizmdir:

$$f_*([j_1] + [j_2]) = f_*([j_1]) + f_*([j_2]).$$

Not. $j \sim k$ ise

$$\begin{aligned} f_*([j]) &= [f \circ j] \\ &= [f \circ k] \quad \dots ([f \circ j] = [f \circ k]) \\ &= f_*([k]) \end{aligned}$$

olacağından f_* iyi tanımlıdır. □

Teorem 4.2.2 (Açığa Çıkan Homomorfizmin Özellikleri) $f : X \rightarrow Y$ işaretli sürekli bir dönüşüm ise açığa çıkan fonksiyon $f_* : \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(Y)$ bir grup homomorfizmidir ve

1. $g : Y \rightarrow Z$ başka bir işaretli dönüşüm ise

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$$

2. $i : X \rightarrow X$ birim dönüşüm ise, i_* her n için

$$\pi_n(X) \rightarrow \pi_n(X)$$

birim homomorfizmidir.

3. $h : X \rightarrow Y$ dönüşümü f ile işaretli homotop ise

$$h_* = f_*$$

4. $c : X \rightarrow Y$ dönüşümü X uzayının her noktasını Y uzayının temel noktasına götürüyorsa

$$c_* = 0$$

sıfır homomorfizmidir
özellikleri sağlanır.

İspat. $j_1, j_2 : S^n \rightarrow X$ işaretli dönüşümler olsun. Buradan

$$f_*([j_1] + [j_2]) = f_*([j_1 \# j_2]) = [f \circ (j_1 \# j_2)]$$

olur. j_1 ve j_2 fonksiyonlarını $(s_1, \dots, s_n) \in S^n$ için

$$f \circ (j_1 \# j_2)(s_1, \dots, s_n) = \begin{cases} f(j_1(s_1, \dots, s_{n-1}, 2s_n)) & \text{eğer } s_n \leq \frac{1}{2}, \\ f(j_2(s_1, \dots, s_{n-1}, 2s_n - 1)) & \text{eğer } s_n \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

olarak yazabiliriz. Burada sağ taraftaki ifade $(f \circ j_1) \# (f \circ j_2)$ olacağından

$$[f \circ (j_1 \# j_2)] = [(f \circ j_1) \# (f \circ j_2)] = [f \circ j_1] + [f \circ j_2] = f_*[j_1] + f_*[j_2]$$

olur.

1. f_* fonksiyonu f ile bileşke olarak tanımlandığından g ile bileşke almak, $g \circ f$ ile bileşke almakla aynı fonksiyonu olacaktır.

2. $i : X \rightarrow X$ birim dönüşüm ve $j : S^n \rightarrow X$ herhangi bir dönüşüm olmak üzere $i \circ j = j$ olduğundan $i_*[j] = [i \circ j] = [j]$ olur. Buradan açığa çıkan homomorfizm i_* , $\pi_n(X)$ üzerinde birim fonksiyon olur.

3. $f \sim g : X \rightarrow Y$ ve $h \sim j : Y \rightarrow Z$ ise, $(h \circ f) \sim (j \circ g) : X \rightarrow Z$ olduğundan açıktır.

4. Herhangi bir $j : S^n \rightarrow X$ dönüşümünü c ile bileşke almak, temel noktaya giden sabit dönüşümü verir ki bu $\pi_n(Y)$ grubunun sıfır elemanını temsil eder. Bu nedenle tüm $[j] \in \pi_n(X)$ için $c_*([j]) = 0 \in \pi_n(Y)$ olur. $\square$

Önerme 4.2.3 Her $(x, y) \in S^1$ için

$$f(x, y) = (x, y)$$

olacak şekilde $f : D^2 \rightarrow S^1$ sürekli dönüşüm yoktur.

İspat. Kabul edelim ki her $(x, y) \in S^1$ için $f(x, y) = (x, y)$ olacak şekilde $f : D^2 \rightarrow S^1$ sürekli dönüşüm olsun. f dönüşümünü S^1 'in D^2 'nin sınırına dahil edilmesi olan $i : S^1 \rightarrow D^2$ ile birleştirerek

$$S^1 \xrightarrow{i} D^2 \xrightarrow{f} S^1$$

dizisi elde edilir. Bu diziyi homotopi gruplarına uygularsak

$$\pi_1(S^1) \xrightarrow{i_*} \pi_1(D^2) \xrightarrow{f_*} \pi_1(S^1)$$

grup homomorfizm dizisini elde ederiz. Burada

- $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$
- $\pi_1(D^2) = 0$ (D^2 konveks bir uzay)

olur. Buradan grup dizisi

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{i_*} 0 \xrightarrow{f_*} \mathbb{Z}$$

olarak yazılabilir. Bu diziden, $\mathbb{Z}$ 'deki herhangi bir tam sayıyı alıp önce i_* , ardından f_* uygulanırsa her $n \in \mathbb{Z}$ için $i_*(n) = 0$ olacağından $f_*(0)$ olur.

$f(x, y) = (x, y)$ koşulundan $f \circ i$ fonksiyon S^1 üzerinde birim dönüşüm olacağından

$$f_* \circ i_* = (f \circ i)_*$$

olur. Dolayısıyla $(f \circ i)_*$ fonksiyonu $\pi_1(S^1)$ üzerinde birim grup homomorfizmi olmalıdır. Bu sıfır homomorfizm olması ile çelişir. Bu çelişki, böyle bir f dönüşümünün var olamayacağını gösterir. $\square$

Sonuç 4.2.4 *Sürekli birebir olan bir fonksiyon homotopi grupları üzerinde birebir olmayan homomorfizm açığa çıkarılabilir. Örneğin, $i : S^1 \rightarrow D^2$ içine dönüşümü π_1 üzerinde sıfır homomorfizm açığa çıkarır.*

Örnek 4.2.5 $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ evrensel örtü dönüşümünü

$$p(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

ile tanımlanır. Bu dönüşüm sürekli ve her $s \in S^1$ için $p(t) = s$ olacak şekilde bir $t \in \mathbb{R}$ var olduğundan örtendir. Ancak, p dönüşümünün açığa çıkardığı homomorfizm

$$p_* : \pi_1(\mathbb{R}) \rightarrow \pi_1(S^1)$$

$\pi_1(\mathbb{R}) = 0$ ($\mathbb{R}$ konveks olduğundan) ve $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ olduğundan örten değildir.

Sonuç 4.2.6 *Sürekli örten olan bir fonksiyon homotopi grupları üzerinde örten olmayan homomorfizm açığa çıkarılabilir.*

Önerme 4.2.7 $f : S^1 \rightarrow S^1$ dönüşümü için $f \circ f$ sabit dönüşüm ise, o zaman $f_* : \pi_1(S^1) \rightarrow \pi_1(S^1)$ sıfır homomorfizmdir.

İspat. $f \circ f$ bileşiminden $(f \circ f)_* = f_* \circ f_*$ homomorfizmi açığa çıkar. Herhangi bir $j : S^n \rightarrow X$ dönüşümünü sabit dönüşüm c ile bileşke almak, temel noktaya giden sabit dönüşümü vereceğinden $f \circ f$ sabit bir dönüşüm olduğundan açığa çıkan homomorfizm sıfır homomorfizmdir. $\square$

Örnek 4.2.8 $f : S^1 \rightarrow S^1$ dönüşümü için $f \circ f$ sabit dönüşüm olsun. $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ olduğundan, $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ şeklindeki grup homomorfizmleri yalnızca tam sayılarla çarpma işlemiyle tanımlanır. Yani $k \in \mathbb{Z}$ için $f_*(n) = kn$ şeklindedir. Ancak, $f_* \circ f_* = 0$ olduğundan her $n \in \mathbb{Z}$ için

$$f_*(f_*(n)) = f_*(kn) = k^2n = 0$$

olur. Bu, $k^2 = 0$ anlamına gelir, ancak $k \in \mathbb{Z}$ olduğundan bu durum yalnızca $k = 0$ için mümkündür. Bu nedenle $f_* = 0$ sıfır homomorfizmdir.

Önerme 4.2.9 X ve Y işaretli homotopi açısından denk ise, o zaman $\pi_n(X)$ ve $\pi_n(Y)$ her n için izomorf olur.

İspat. X ve Y işaretli homotopi açısından denk olduğundan $f \circ g \sim \text{Id}_Y$ ve $g \circ f \sim \text{Id}_X$ olacak şekilde $f : X \rightarrow Y$ ve $g : Y \rightarrow X$ sürekli dönüşümleri vardır Buradan açığa çıkan homomorfizmler f_* ve g_* birbirinin tersidir.

Örneğin, $f \circ g$ dönüşümü Y üzerinde birim dönüşüme homotop olduğundan, $(f \circ g)_* = \text{Id}$ olur. Ancak, $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ olduğundan

$$f_* \circ g_* = \text{Id}$$

elde edilir. Benzer şekilde, $g \circ f$ dönüşümü X üzerinde birim dönüşüme homotop olduğundan, $(g \circ f)_* = \text{Id}$ olur. Ancak, $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ olduğundan

$$g_* \circ f_* = \text{Id}$$

elde edilir. Bu, f_* ve g_* 'nin birbirinin tersi olduğunu ve dolayısıyla izomorfizm olduklarını gösterir. Sonuç olarak her n için

$$\pi_n(S) \cong \pi_n(T)$$

olur. □

Sonuç 4.2.10 Homeomorf uzaylar aynı homotopi gruplarına sahiptir.

Örnek 4.2.11 $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ uzayı S^1 çemberine homotopi açısından denktir.

$\mathbb{R}^2 - \{0\}$, orijini çıkardığımız $\mathbb{R}^2$ düzlemidir. Bu uzay, orijinden uzaklaşan tüm noktaların birim çembere (S^1) radyal olarak büzülmesiyle S^1 uzayına homotopi açısından denktir. Buradan $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ uzayının homotopi grupları S^1 uzayının homotopi gruplarıyla aynıdır. Bu büzülme, $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ 'daki her noktayı, aynı doğrultuda bulunan S^1 üzerindeki bir noktaya eşler.

- $\pi_1(\mathbb{R}^2 - \{0\}) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.
- $\pi_i(\mathbb{R}^2 - \{0\}) = \pi_i(S^1) = 0$ her $i > 1$ için.

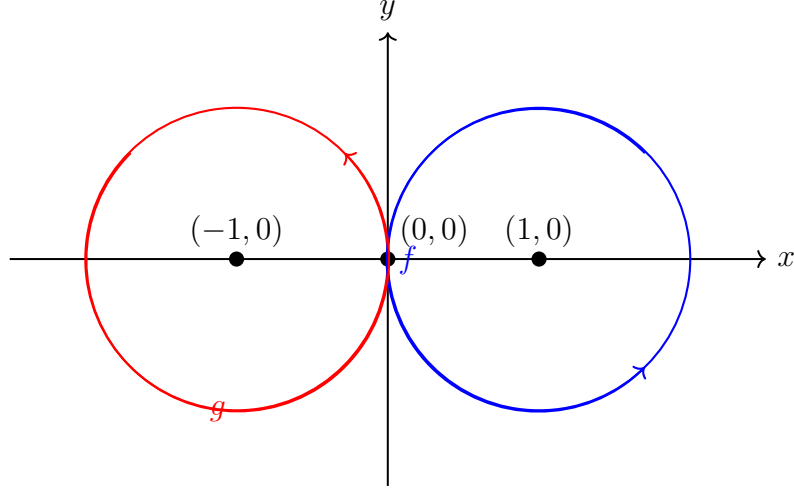
4.3 Temel Grup

Tanım 4.3.1 (Temel Grup $\pi_1(X)$) Bir X topolojik uzayı ve bir $x_0 \in X$ temel noktası verildiğinde, X uzayının birinci homotopi grubuna X uzayının **temel grubu** denir.

Teorem 4.3.2 $n > 1$ için $\pi_n(X)$ bir Abelyan gruptur.

Örnek 4.3.3 $X \subset \mathbb{R}^2$ uzayn, $(|x| - 1)^2 + y^2 = 1$ koşulunu sağlayan noktalar kümesi (sekiz şekli) olmak üzere $\pi_1(X)$ Abelyan değildir.

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (|x| - 1)^2 + y^2 = 1\}$$



X , iki çemberin bir noktada birleşmesiyle oluşan bir "sekiz şekli"dir. Bu durumda, X uzayının birinci temel grubu $\pi_1(X)$, iki çemberin birleştirilmesiyle oluşan serbest bir gruptur. Bu grupta, çemberlerin dolanma sayıları bağımsızdır ve toplama işlemi genellikle komütatif değildir.

$$f : S^1 \rightarrow X$$

$$f(x, y) = (1 - x, y)$$

dönüşümü S^1 çemberini X 'in sağ çemberi boyunca dolaştırır.

$$\text{ve } g : S^1 \rightarrow X$$

$$g(x, y) = (x - 1, y).$$

dönüşümü S^1 çemberini X 'in sol çemberi boyunca dolaştırır.

$f \# g$: f dönüşümünü, ardından g dönüşümünü takip eden bir yol ve $g \# f$: g dönüşümünü, ardından f dönüşümünü takip eden bir yol olmak üzere

$$[f \# g] \neq [g \# f]$$

olduğundan Bu iki yol, homotopi açısından denk değildir.

Bu, $\pi_1(X)$ grubunun toplama işlemi altında komütatif olmadığını, yani $\pi_1(X)$ grubunun Abelyan bir grup olmadığını gösterir.

Sonuç 4.3.4 Sekiz şekli gibi bir uzayın birinci temel grubu $\pi_1(X)$, genellikle serbest bir grup olur ve Abelyan değildir. Bu, X üzerindeki yolların birleştirilme sırasının homotopi açısından önemli olduğunu gösterir.

Lemma 4.3.5 *X uzayı yol bağlantılıdır ancak ve ancak $\pi_0(X)$ yalnızca bir elemana sahiptir.*

İspat. $\Rightarrow$ X yol bağlantılıysa, X uzayının herhangi iki noktası arasında bir yol vardır. Bu durumda, X uzayının tüm noktaları aynı bağlantı bileşenine aittir. Dolayısıyla, $\pi_0(X)$ yalnızca bir elemana sahiptir.

$\Leftarrow$ $\pi_0(X)$ yalnızca bir elemana sahipse, bu X uzayının yalnızca bir bağlantı bileşeni olduğu anlamına gelir. Bu durumda, X uzayının herhangi iki noktası arasında bir yol vardır ve X yol bağlantılı olur.

□

Uyarı 4.3.6 *X uzayı yol bağlantılı değilse, X uzayının noktaları üzerinde*

$$x \sim y \iff x \text{ ile } y \text{ arasında bir yol vardır.}$$

denklik bağıntısı tanımlayabiliriz. Bu bağıntı X uzayının noktalarını yol bağlantılı bileşenlere ayırır. Elde edilen denklik sınıfları kümesi, tam olarak $[S^0, X]$ homotopi sınıflarının kümesidir. Burada $[S^0, X]$ denklik sınıfı S^0 uzayından X uzayına olan işaretli sürekli dönüşümlerin homotopi sınıflarını ifade eder.

Bu küme, homotopi gruplarıyla birlikte ele alınır ve bazen **0. homotopi grubu** olarak adlandırılır. Ancak, bu bir grup yapısına sahip değildir.

Önerme 4.3.7 *X bir işaretli topolojik uzay olmak üzere $n > 0$ ise*

$$\pi_n(X) = \pi_n(X_0)$$

olur. Burada X_0 , X 'in temel noktayı içeren yol bağlantılı bileşenidir.

İspat. $n > 0$ olduğunda, $\pi_n(X)$, $S^n \rightarrow X$ olan işaretli sürekli dönüşümlerin homotopi sınıflarından oluşur. Bu dönüşümlerin homotopi sınıfları, yalnızca temel noktayı içeren yol bağlantılı bileşen X_0 ile ilgilidir.

S^n ($n > 0$) yol bağlantılı bir uzaydır. Bu nedenle, $S^n \rightarrow X$ herhangi bir sürekli dönüşüm, X uzayının yalnızca bir yol bağlantılı bileşenine görüntü alabilir. Özellikle, temel noktayı sabit tutan işaretli dönüşümler, yalnızca X_0 kümesine götürür.

$f : S^n \rightarrow X$ bir işaretli dönüşümse, f fonksiyonunun görüntüsü X uzayının temel noktayı içeren yol bağlantılı bileşeni X_0 kümesinde yer alır. Bu nedenle, f ve g gibi iki dönüşümün homotopi sınıfları, yalnızca X_0 kümesindeki yollarla ilgilidir. Buradan

$$\pi_n(X) = \pi_n(X_0).$$

olur.

X uzayının diğer yol bağlantılı bileşenleri, temel noktayı içermediğinden, S^n uzayından bu bileşenlere herhangi bir işaretli dönüşüm olamaz. Bu nedenle, X uzayının diğer bileşenleri $\pi_n(X)$ de bulunmaz.

Sonuç olarak, $\pi_n(X)$ yalnızca X_0 kümesine bağlıdır. Buradan

$$\pi_n(X) = \pi_n(X_0)$$

elde edilir.

□

Sonuç 4.3.8 Eğer $n > 0$ ise, bir topolojik uzayın homotopi grupları, yalnızca temel noktayı içeren yol bağlantılı bileşen tarafından belirlenir. Diğer bileşenler homotopi gruplarına katkıda bulunmaz.

Örnek 4.3.9 $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar ve $\mathbb{Z}$ tam sayılar için homotopi grupları

- $\pi_0(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ ve $\pi_i(\mathbb{Q}) = 0$ her $i > 0$ için.
- $\pi_0(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ ve $\pi_i(\mathbb{Z}) = 0$ her $i > 0$ için.

olur.

$\pi_0(\mathbb{Q})$, $\mathbb{Q}$ uzayında yol bağlantılı bileşenlerini ifade eder. Ancak $\mathbb{Q}$ uzayında her bir nokta kendi başına bir yol bağlantılı bileşendir, çünkü $\mathbb{Q}$ yol bağlantılı değildir. Buradan

$$\pi_0(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$$

olur

Benzer şekilde $\mathbb{Z}$ uzayında her bir tam sayı kendi yol bağlantılı bileşeni olduğundan

$$\pi_0(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

olur.

Daha yüksek homotopi grupları (π_i için $i > 0$), yalnızca yol bağlantılı bileşenler üzerinde tanımlanır. Ancak $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{Z}$ uzaylarında her bir yol bağlantılı bileşen tek bir noktadan oluştuğundan her $i > 0$ için

$$\pi_i(\mathbb{Q}) = 0$$

ve

$$\pi_i(\mathbb{Z}) = 0$$

elde edilir.

Not. Homotopi grupları, $\mathbb{Q}$ gibi ayrık olmayan bir topolojik uzayı, $\mathbb{Z}$ gibi ayrık bir uzaydan ayırt edemez. Bu, homotopi gruplarının topolojik uzayların tüm karmaşıklığını yakalayamadığını gösterir. $\square$

4.4 Van Kampen Teoremi

Teorem 4.4.1 (Van Kampen Teoremi) $X = U \cup V$ ve U, V açık alt kümeler olmak üzere $U \cap V$ yol bağlantılı ve X uzayının temel noktasını içeriyorsa, o zaman her $\alpha \in \pi_1(X)$ için

$$\alpha = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n,$$

olur. Burada her β_i , ya $j_*(\pi_1(U))$ 'de ya da $k_*(\pi_1(V))$ 'de bir elemandır ve $j_* : \pi_1(U) \rightarrow \pi_1(X)$ ve $k_* : \pi_1(V) \rightarrow \pi_1(X)$, sırasıyla $j : U \subset X$ ve $k : V \subset X$ içine dönüşümleri tarafından açığa çıkarılan homomorfizmlerdir.

İspat. $\alpha \in \pi_1(X)$ elemanını, $f : S^1 \rightarrow X$ dönüşümü tarafından temsil edilen bir kapalı yol olarak düşünelim. f , $[0, 1]$ aralığında tanımlı bir yol ve $f(0) = f(1)$ temel nokta olsun.

f , $[0, 1/2]$ aralığında U kümesine ve $[1/2, 1]$ aralığında V kümesine götürsün, $f(1/2) \in U \cap V$ olur. $U \cap V$ yol bağlantılı olduğundan, $f(1/2)$ noktasından temel noktaya bir yol $g : [0, 1] \rightarrow U \cap V$ tanımlanabilir. Şimdi f fonksiyonunu

$$f_1(s) = \begin{cases} f(s), & \text{eğer } s \leq 1/2, \\ g(2s - 1), & \text{eğer } s \geq 1/2, \end{cases}$$

ve

$$f_2(s) = \begin{cases} g(1 - 2s), & \text{eğer } s \leq 1/2, \\ f(s), & \text{eğer } s \geq 1/2. \end{cases}$$

şeklinde iki yol olarak parçalayalım. Burada f_1 tamamen U içinde, f_2 , tamamen V içinde bir yol oluşturur. Buradan $[f_1] \in j_*(\pi_1(U))$ ve $[f_2] \in k_*(\pi_1(V))$ olur. Ayrıca, $f_1 \# f_2$ 'nin f 'ye homotop olduğu bir F homotopisi

$$F(s, t) = \begin{cases} f_1 \# f_2 \left(\frac{s}{1+t} \right), & \text{eğer } s \leq 1/2, \\ f_1 \# f_2 \left(\frac{s+t}{1+t} \right), & \text{eğer } s \geq 1/2. \end{cases}$$

ile tanımlanabilir. Bu homotopi, $f_1 \# f_2$ 'nin f 'ye homotop olduğunu gösterir. Dolayısıyla $[f_1] \in j_*(\pi_1(U))$ ve $[f_2] \in k_*(\pi_1(V))$ olmak üzere

$$\alpha = [f] = [f_1] + [f_2],$$

olur.

f , birden fazla kez U ve V arasında geçiş yapıyorsa, $[0, 1]$ aralığını uygun alt aralıklara bölebiliriz. Her alt aralık, ya tamamen U kümesine ya da tamamen V kümesine götürür. Bu alt aralıklar birleştirilerek, f , U ve V kümelerinde tanımlı yolların bir $\#$ toplamı olarak ifade edilebilir.

Sonuç olarak, her $\alpha \in \pi_1(X)$, $j_*(\pi_1(U))$ ve $k_*(\pi_1(V))$ 'deki elemanların bir toplamı olarak yazılabilir. $\square$

Sonuç 4.4.2 *Van Kampen Teoremi, bir uzayın birinci temel grubunun, uygun şekilde tanımlanmış altkümelerin temel gruplarından türetilebileceğini gösterir.*

Örnek 4.4.3 (S^n 'in $\pi_1(S^n) = 0$ olduğunun Van Kampen Teoremi ile Gösterimi) S^n küresinin $\pi_1(S^n) = 0$ olduğunu Van Kampen Teoremi kullanarak gösterelim.

S^n küresini sırasıyla kuzey kutbunun çıkarılması $U = S^n - \{(0, \dots, 0, 1)\}$ ve güney kutbunun çıkarılması $V = S^n - \{(0, \dots, 0, -1)\}$ olmak üzere

$$S^n = U \cup V$$

şeklinde iki açık kümenin birleşimi olarak yazalım.

U ve V , stereografik projeksiyon ile $\mathbb{R}^n$ uzayına homeomorftur. $\mathbb{R}^n$ büzülebilir bir uzay olduğundan, U ve V de büzülebilir olacağından

$$\pi_1(U) = \pi_1(V) = 0$$

olur.

$U \cap V$, S^n 'den hem kuzey hem de güney kutbunun çıkarılmasıyla elde edilir. Bu, $S^{n-1} \times (-1, 1)$ kümesine homeomorftur ve S^{n-1} kümesine homotopi denktir. S^{n-1} yol bağlantılı olduğundan, $U \cap V$ de yol bağlantılıdır.

Van Kampen Teoremi'ne göre, S^n 'in birinci temel grubu $\pi_1(S^n)$, U , V ve $U \cap V$ 'nin temel gruplarından türetilir. Buradan

$$\pi_1(U) = \pi_1(V) = 0,$$

ve $U \cap V$ yol bağlantılı olduğundan, Van Kampen Teoremi'ne göre:

$$\pi_1(S^n) = 0$$

elde edilir. Sonuç olarak S^n 'in birinci temel grubu aşıkardır, yani:

$$\pi_1(S^n) = 0$$

olur.

Sonuç 4.4.4 Eğer U ve V kümelerinin temel grupları aşıkardır ise ($\pi_1(U) = \pi_1(V) = 0$), Van Kampen Teoremi, X uzayının temel grubunun da trivial olduğunu ($\pi_1(X) = 0$) gösterir.

Örnek 4.4.5 $X = S^1$ ve $U = V = S^1$ olsun. Buradan $U = V = S^1$ olduğundan $\pi_1(U) = \pi_1(V) = \mathbb{Z}$ ve $U \cap V = S^1$ olduğundan $\pi_1(U \cap V) = \mathbb{Z}$ olur.

$X = D^2$, $U = D^2 - \{(-1, 0)\}$ ve $V = D^2 - \{(1, 0)\}$ olsun Buradan U ve V , D^2 'den birer noktanın çıkarılmasıyla elde edilir ve S^1 'e homotopi denktir. Buradan

$$\pi_1(U) = \pi_1(V) = \mathbb{Z}$$

olur. $U \cap V$, D^2 'den iki noktanın çıkarılmasıyla elde edilir ve yol bağlantılıdır. Ancak, $U \cap V$ 'nin homotopi grubu $\pi_1(U \cap V)$, $\pi_1(U)$ ve $\pi_1(V)$ 'den farklı olabilir. $X = D^2$ büzülebilir bir uzaydır olduğundan

$$\pi_1(X) = 0$$

olur. Bu iki durum, $\pi_1(U)$ ve $\pi_1(V)$ 'nin tek başına $\pi_1(X)$ 'i belirlemek için yeterli olmadığını gösterir. U ve V 'nin kesişimi olan $U \cap V$ 'nin homotopi özellikleri de dikkate alınmalıdır.

Sonuç 4.4.6 U ve V kümelerinin temel grupları aşıkardır değilse, Van Kampen Teoremi $\pi_1(X)$ değerini tam olarak belirleyemez. Bu durumda, $U \cap V$ için homotopi özellikleri ve $\pi_1(U)$, $\pi_1(V)$ ile olan ilişkisi de dikkate alınmalıdır.

Teorem 4.4.7 (Whitehead Teoremi) X ve Y bağlantılı simplisel kompleksler ve $f : X \rightarrow Y$ sürekli dönüşümü için her i için

$$f_* : \pi_i(X) \rightarrow \pi_i(Y)$$

bir izomorfizm ise, o zaman f , X ve Y arasında bir homotopi denkliğidir. Yani,

$$f \circ g \sim Id_Y \quad \text{ve} \quad g \circ f \sim Id_X$$

olacak şekilde bir $g : Y \rightarrow X$ dönüşümü vardır.

İspat. [İspatın Ana Fikri] Whitehead Teoremi, homotopi gruplarının izomorfizminin, simplisel kompleksler arasında bir homotopi denkliği oluşturmak için yeterli olduğunu ifade eder.

$f_* : \pi_i(X) \rightarrow \pi_i(Y)$ her i için bir izomorfizm olduğundan, f , X 'in homotopi gruplarını Y 'nin homotopi gruplarına birebir ve örten bir şekilde eşler.

f 'nin homotopi gruplarındaki etkisi bir izomorfizm olduğundan, f , X ve Y arasında bir homotopi denkliği oluşturur. Bu, f 'nin bir ters dönüşümü $g : Y \rightarrow X$ olduğu anlamına gelir. Bu ters dönüşüm, homotopi açısından f 'nin tersidir:

$$f \circ g \sim Id_Y \quad \text{ve} \quad g \circ f \sim Id_X.$$

X ve Y simplisel kompleksler olduğundan, bu yapıların homotopi gruplarındaki izomorfizm, simplisel komplekslerin homotopi denkliği için yeterlidir.

Sonuç olarak, f , X ve Y arasında bir homotopi denkliğidir. $\square$

Sonuç 4.4.8 *Whitehead Teoremi, simplisel kompleksler arasında homotopi gruplarının izomorfizminin, bu kompleksler arasında bir homotopi denkliği oluşturmak için yeterli olduğunu gösterir.*

Kaynakça

- [1] M.,F. Atiyah, *K-Theory*, CRC press, 2018.
- [2] Glen E. Bredon, *Topology and Geometry*, Springer-Verlag, 1993.
- [3] Martin D. Crossley, *Essential Topology*, Springer Science and Business Media, 2006.
- [4] Samuel Eilenberg and Norman E. Steenrod, *Foundations of Algebraic Topology*, Princeton University Press, 1954.
- [5] William Fulton, *Algebraic Topology: A First Course*, Springer-Verlag, 1995.
- [6] Allen Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.
- [7] Dale Husemoller, *Fibre Bundles*, 3rd ed., Springer-Verlag, 1994.
- [8] Koray Yılmaz, Elis Soylu Yılmaz, *Adım Adım Topoloji: İlk Adım*, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Yayınları No: 402, 2024.
- [9] William S. Massey, *A Basic Course in Algebraic Topology*, Springer-Verlag, 1991.
- [10] Şaziye Yüksel, *Genel Topoloji*, No. 109. Eğitim Yayınevi, 2014.

Dizin

- Abelyan grup, 94, 110
Açığa çıkan homomorfizmler, 106–110
Ayrık birleşim uzayı, 13–18, 39–44
Bağlantılılık, 3–12
Bölüm uzayı, 23–29
Büzülebilir uzay, 70–71
Çarpım uzayı, 18–23, 44–49
Çember S^1 , 77–79, 90–95, 110–113
Deformasyon retraksiyonu, 14–17
Eşdeğerlik bağıntısı, 23–24
Fundamental grup π_1 , 108–113
Hausdorff özelliği, 23–28
Homeomorfizm, 3–13, 29–39
Homomorfizm, 94–110
Homotopi, 53–67, 90–95
Homotopi denklik, 65–71
Homotopi grupları π_n , 92–110
İzdüşüm fonksiyonu, 23–26
İşaretli uzay (pointed space), 93–95
Kompaktlık, 17–23
Kaldırma (lifting), 90–94
Kapalı yol (loop), 108–110
Yol (path), 18–20, 108–110
Yol bağlantılığı (path-connected), 18–22
Van Kampen Teoremi, 111–114
Küreler S_0, S_1, S_2 , 3–5
Süreklilik, 4–10, 29–33
Topolojik uzay, 2–10, 29–39
Üsttopoloji, 2–4
Whitehead Teoremi, 114–116
 π_1 (temel grup), 108–113
 π_n (yüksek homotopi grupları), 109–110

TEMEL HOMOTOPI TEORİSİ

